Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
A. Fromkorth
A. Janoschek
A. Keller

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

09.06.2008

Einführung in die Stochastik

11. Übung
Gruppenübung: 09./10.06.2008
Abgabe Hausübung: 16./17.06.2008

Gruppenübung

G 17 Gegeben seien Punkte $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, \dots, n$. Betrachten Sie diskrete Zufallsvariablen X, Y mit gemeinsamer Verteilung

$$P(\{(X,Y) = (x_i, y_i)\}) = \frac{1}{n}, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Bestimmen Sie $E(X)$, $E(Y)$, $Var(X)$, $Var(Y)$ sowie $Cov(X,Y)$.

G 18 Zeigen Sie: Aus

$$\forall \varepsilon > 0: \qquad \lim_{n\to\infty} P(\{|X_n - X| > \varepsilon\}) = 0 \text{ (X_n konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen X)}$$

folgt nicht

$$P(\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\}) = 1 \text{ (X_n konvergiert fast sicher gegen X).}$$

Hinweis: Wählen Sie $\Omega = [0,1]$, P Lebesguemaß auf Ω und $X_n = 1_{A_n}$ für geeignete A_n.

Hausübung

H 44 Für $i = 1, \dots, n$ seien Punkt $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ gegeben mit $|\{x_i,\, i = 1, \dots, n\}| > 1$. Wir setzen

$$b^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n x_i)^2}$$

und

$$g(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i + b^* \left(t - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right).$$

Zeigen Sie, dass

$$\sum_{i=1}^n (y_i - g(x_i))^2 \le \sum_{i=1}^n (y_i - h(x_i))^2$$

für jedes Polynom h vom Grad höchstens eins gilt. Wie läßt sich dieses Ergebnis interpretieren?
Hinweis: Benutzen Sie G 17 und Satz VI.2.18.

H 45 Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeigen Sie:
Aus

$$P(\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\}) = 1$$

folgt

$$\lim_{n\to\infty} P(\{|X_n - X| > \epsilon\}) = 0 \quad \forall \epsilon > 0.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Folge $A_n := \{\sup_{k\ge n} |X_k - X| > \epsilon\}$.

H 46 Sei $(X_i)_{i=1,\dots,n}$ eine Folge von unabhängigen Bernoulli-Variablen mit Parameter $0 < p < 1$. Wir betrachten die Summenvariablen $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Sei $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen. Wir setzen $a_n = P(\{|S_n - np| \leq \varepsilon_n\})$.
Zeigen Sie

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{n}} = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{n}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Hinweis: Benutzen Sie für (ii) die Stirlingsche Formel (Lemma III.5.14).

H 47 Programmieraufgabe
Wir betrachten die Zufallsvariable X aus Beispiel VII.2.9, d.h.

$$X := \max\{k \in \mathbb{N}_0 : \sum_{i=1}^{k} Y_i \leq 1\},$$

wobei $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ iid mit $Y_1 \sim \mathbf{Exp}(5)$. Bestimmen Sie per Simulation näherungsweise die Verteilungsfunktion und die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X.
Welche Vermutung haben Sie hinsichtlich der Verteilung von X (es handelt sich dabei um eine der Ihnen bekannten Verteilungen)?

H 48 Alternative zur Programmieraufgabe
Weierstraßsches Approximationstheorem
Sei $f \in C([0,1])$. Weiterhin sei $B_n \in C([0,1])$ für $n \in \mathbb{N}$ gegeben durch

$$B_n(p) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k}, \qquad p \in [0,1]$$

($B_n(p)$ heißt *n-tes Bernsteinpolynom*). Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \max_{p\in[0,1]} |f(p) - B_n(p)| = 0.$$

Hiweis: Verwenden Sie die gleichmäßige Stetigkeit von f und die Tschebyscheffsche Ungleichung.