



## Einführung in die Stochastik

### 10. Übung

Gruppenübung: 02.06.2008

Abgabe Hausübung: 09.06.2008

#### Gruppenübung

**G 15** Wir betrachten folgendes Würfelexperiment:

Man würfelt so lange, bis jede der Zahlen  $1, \dots, 6$  mindestens einmal vorgekommen ist.

- (i) Wie groß ist der Erwartungswert der Zahl der benötigten Würfe?
- (ii) Sei  $X_2$  die Anzahl der Würfe, bis das zweite verschiedene Wurfresultat kommt und  $X_3$  die Anzahl der Würfe, bis das dritte verschiedene Wurfresultat kommt. Welche Varianz besitzt  $X_3 - X_2$ ?

**G 16** Sei  $X \sim \mathbf{U}([-1, 1])$  und  $Y = |X|$ .

- (i) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von  $Y$ . Welche Ihnen bekannte Verteilung besitzt  $Y$ ?
- (ii) Sind  $X$  und  $Y$  unkorreliert?
- (iii) Sind  $X$  und  $Y$  unabhängig?

#### Hausübung

**H 40** Berechnen Sie die Erwartungswerte und Varianzen folgender Verteilungen:

- (i) Geometrische Verteilung  $\mathbf{G}(p)$ ,  $p \in (0, 1)$
- (ii) Poissonverteilung  $\mathbf{P}(\lambda)$ ,  $\lambda > 0$
- (iii) Normalverteilung  $\mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ ,  $\sigma > 0$

**Hinweis:**

- $\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^3}$
- Ist  $f$  eine ungerade, integrierbare Funktion, so folgt  $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = 0$
- $\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

**H 41** Zeigen Sie

- (i) Sei  $X$  eine Zufallsvariable mit Werten in  $\mathbb{N}$  und sei  $E(X) < \infty$ , dann gilt

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\{X \geq n\}) \quad E(X^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)P(\{X \geq n\}).$$

- (ii) Seien  $X_1, \dots, X_n$  iid Zufallsvariablen mit positiven Werten. Dann gilt

$$E\left(\frac{X_1}{X_1 + X_2 + \dots + X_n}\right) = \frac{1}{n}.$$

**Hinweis:** Zeigen Sie zuerst, daß die Folge  $\left(\frac{X_i}{\sum_{j=1}^n X_j}\right)_{i=1}^n$  identisch verteilt ist.

**H 42** Beweisen Sie die Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung:

Für quadratisch integrierbare Zufallsvariablen  $X, Y$  gilt

$$|E(X \cdot Y)| \leq \sqrt{E(X^2) \cdot E(Y^2)}.$$

**Hinweis:** Betrachten Sie einen Ausdruck der Art  $E(aX + bY)^2$ .

**H 43** Zeigen Sie Satz VI.2.18 der Vorlesung.