



Einführung in die Stochastik

9. Übung

Gruppenübung: 26.05.2008

Abgabe Hausübung: 02.06.2008

Gruppenübung

G 13 Der zweidimensionale Zufallsvektor (X, Y) sei gleichverteilt auf dem Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$.

1. Bestimmen Sie die Randverteilungen P_X und P_Y .
2. Sind die Zufallsvariablen X und Y unabhängig?
3. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen Z , die gegeben ist als $Z = X + Y$

G 14 Die zweidimensionale Zufallsvariable (X, Y) sei absolutstetig verteilt mit der Dichte

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}y & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- (i) Bestimmen Sie die Dichten f_X und f_Y sowie die Verteilungsfunktionen F_X und F_Y .
- (ii) Sind die Zufallsvariablen X und Y unabhängig?
- (iii) Berechnen Sie $P(\{X \leq Y\})$.

Hausübung

H 36 Beweisen Sie Satz V.2.9 aus der Vorlesung. **Hinweis:**

- Drücken Sie $P(\{X > x + t\} | \{X > t\}) = P(\{X > x\})$ $t, x > 0$ durch $G(x) = 1 - F_X(x)$ aus.
- Zeigen Sie, daß $G(s) = G(1)^s$ für $s \in \mathbb{Q}$ und leiten Sie ab, daß diese Eigenschaft auch für $s \in \mathbb{R}$ gilt.

H 37 Skizzieren Sie einen Algorithmus, um folgende Verteilungen zu simulieren:

- (i) Exponentialverteilung mit Parameter λ ,
- (ii) geometrische Verteilung mit Parameter p .

Hinweis: Implementierung nicht gefordert.

H 38 Es bezeichnen X die zufällige (absolutstetige) Lebensdauer eines Elements/Systems, F und f deren Verteilungsfunktion und Dichte. Die Größe

$$h(t) := \lim_{h \downarrow 0} \frac{P(X \leq t + h | X > t)}{h} = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \quad (1)$$

wird Ausfallrate genannt und ist ein Maß für die Ausfallanfälligkeit des Elements/Systems nach Erreichen des Alters t .

a) Zeigen Sie, dass gilt:

$$1 - F(t) = \exp \left\{ - \int_0^t h(s) ds \right\}, \quad t \geq 0.$$

Wir betrachten nun n ($n \geq 1$) in Reihe geschaltete Bauelemente mit absolutstetigen Lebensdauern X_1, \dots, X_n mit Verteilungsfunktionen F_i und Dichten f_i , $i = 1, \dots, n$. Die Lebensdauern der Bauelemente seien unabhängig.

- b) Wie hängt die Ausfallrate der Reihenschaltung von den Ausfallraten h_i der einzelnen Bauelemente ab?
- c) Welche Ausfallrate der Reihenschaltung erhält man, wenn die Lebensdauern X_i identisch Weibullverteilt sind mit

$$f_i(t) = bt^{b-1} \exp\{-t^b\}, \quad t \geq 0,$$

wobei b ein positiver Parameter ist.

H 39 Seien X_1 und X_2 unabhängige, absolutstetige Zufallsvariablen mit Dichten f_{X_1} und f_{X_2} . Wir betrachten nun die Zufallsvariable $S = X_1 + X_2$. Zeigen Sie, daß für die Verteilungsfunktion von S gilt

$$F_S(s) = \int_{-\infty}^s \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(u-v) f_{X_2}(v) dv du.$$

Matheball am 28.06.2008

DER KARTENVORVERKAUF HAT BEGONNEN!

MO & DO : 12:30 - 14:00 UHR

DI & MI : 14:00 - 15:00 UHR

IM FACHSCHAFTSRAUM S215/219

ALLE WICHTIGEN INFORMATIONEN GIBT ES AUF WWW.MATHEBAU.DE/MATHEBALL