Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
A. Fromkorth
A. Janoschek
A. Keller

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

19.05.2008

Einführung in die Stochastik
8. Übung
Gruppenübung: 19./20.05.2008
Abgabe Hausübung: 26./27.05.2008

Gruppenübung

G 11 Seien X und X_n, $n \in \mathbb{N}$, Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Werten in $\mathbb{N}$. Mit F_X und F_{X_n} seien die zugehörigen Verteilungsfunktionen bezeichnet. Zeigen Sie: Gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} P(\{X_n = k\}) = P(\{X = k\}),$$

so gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x).$$

G 12 Seien X_1 und X_2 Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Die gemeinsame Verteilung $P_{(X_1,X_2)}$ von X_1 und X_2 sei durch folgendes Tableau gegeben:

X_2 \ X_1	1	2	3
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	0
2	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{5}$
3	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{15}$

(i) Bestimmen Sie die Randverteilungen P_{X_1} und P_{X_2}.

(ii) Sind X_1 und X_2 unabhängig?

(iii) Bestimmen Sie $P(\{X_1 \leq 2\})$.

(iv) Bestimmen Sie $P(\{X_1 \leq X_2\})$.

Hausübung

H 32 Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen. Man bestimme die Verteilungsfunktionen der Zufallsvariablen

$$Y := \max(X_1, \dots, X_n) \qquad \text{und} \qquad Z := \min(X_1, \dots, X_n)$$

mit Hilfe der Verteilungsfunktion von $X_1, \dots, X_n$.

H 33 Seien X und X_n, $n \in \mathbb{N}$, Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Werten in $\mathbb{Z}$. Mit F_X und F_{X_n} seien die zugehörigen Verteilungsfunktionen bezeichnet. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen

(i)
$$\forall k \in \mathbb{Z}: \qquad \lim_{n\to\infty} P(\{X_n = k\}) = P(\{X = k\})$$

(ii)
$$\forall x \in \mathbb{R}: \qquad \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x).$$

H 34 (i) Ihr Zufallszahlengenerator erzeugt die Zufallszahlen

0.2, 0.6, 0.5, 0.3, 0.9.

Erklären Sie, wie Sie unter Anwendung der Inversionsmethode Realisierungen einer arcussinus-verteilten Zufallsvariablen erhalten.

(ii) Wir betrachten eine symmetrische Bernoulli-Irrfahrt $(S_t)_{t\in\{0,\ldots,2n\}}$, $n \in \mathbb{N}$. Die Zufallsvariable

$$Z_{2n} := \frac{1}{T} \cdot |\{t \in \{1,\ldots,2n\} : S_t \geq 0 \text{ und } S_{t-1} \geq 0\}|$$

stellt den relativen Anteil der durch Spieler I gewonnen Runden dar.
Bestimmen Sie $\varepsilon \in]0,1[$ so, dass

$$\lim_{n\to\infty} P(\{Z_{2n} \leq \varepsilon \wedge Z_{2n} \geq 1-\varepsilon\}) = \frac{1}{2}.$$

H 35 Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ der Wahrscheinlichkeitsraum aus Beispiel IV.2.4. Wir betrachten die Zufallsvariable

$$X_n(\omega) = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} 1_{A_i}(\omega)$$

mit

$$A_i = [(2i-1)/2^n, 2i/2^n[.$$

Zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen X_1, $X_2, \ldots$ iid sind und $X_1 \sim B(1, 1/2)$ gilt.