Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
A. Fromkorth
A. Janoschek
A. Keller

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

13.05.2008

Einführung in die Stochastik
7. Übung
Gruppenübung: 13./14.05.2008
Abgabe Hausübung: 19./20.05.2008

Gruppenübung

G 10 Seien $a, b \in \mathbb{N}$ und sei

$$D(0,T) = \{(s_0, \dots, s_T) \in \mathbb{Z}^{T+1} : \forall t \in \{1, \dots, T\} : |s_t - s_{t-1}| \leq 1\}$$

die Menge aller Pfade, die von 0 nach T verlaufen.
Zeigen Sie: Die Anzahl $L_0(a,b)$ der Pfade von a nach b mit mindestens einer Nullstelle ist gleich der Anzahl der Pfade $L(-a,b)$ von $-a$ nach b.

Hausübung

H 27 In your pocket is a random number N of coins, where N has the Poisson distribution with parameter λ. You toss each coin once, with heads showing each time with probability p. Show that the total number of heads has the Poisson distribution with parameter λp.

H 28 Ballot Theorem
Sei $(S_t)_{t\in\{0,\dots,T\}}$ eine symmetrische Bernoulli-Irrfahrt. Ferner seien $r, T \in \mathbb{N}$ mit $r = T \mod 2$. Zeigen Sie

$$P(\{S_k > 0 \quad \text{für alle } k \in \{1, \dots, T\}\} | \{S_T = r\}) = \frac{r}{T}.$$

Hinweis: Setzen Sie $m = \frac{T-r}{2}$, $n = \frac{T+r}{2}$ und benutzen Sie Aufgabe G10.

H 29 Sei $(S_t)_{t\in\{0,\dots,T\}}$ eine symmetrische Bernoulli-Irrfahrt. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.
Hinweis: Sie müssen Ihre Antworten hier nicht begründen.
In der Klausur gilt für diesen Typ Aufgabe: Pro richtige Antwort gibt es einen Punkt, pro falsche Antwort wird einen Punkt abgezogen. Die minimal erreichbare Punktzahl der Aufgabe ist 0 Punkt.

1. Für alle ganzen Zahlen $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ sind S_{t_1} und S_{t_2} unabhängig.
2. Für jede ganze Zahl $0 \leq t < T$ sind $\{S_t = 0\}$ und $\{S_T \geq 0\}$ unabhängig.
3. Für alle ganzen Zahlen $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4 < T$ sind
$$S_{t_2} - S_{t_1} \qquad \text{und} \qquad S_{t_4} - S_{t_3}$$
unabhängig.
4. Für jede ganze Zahl $0 < t_0 < T$ ist
$$(S_{t+t_0} - S_{t_0})_{t\in\{0,\dots,T-t_0\}}$$
eine symmetrsiche Bernoulli-Irrfahrt.

H 30 Programmieraufgabe

Seien $Y_1, \ldots, Y_T$ iid Zufallsvariablen. Für ihre Verteilungen gelten die Symmetrien

$$a_k := P(\{Y_1 = k\}) = P(\{Y_1 = -k\})$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Untersuchen Sie experiementell für konkrete Werte von $a_0, a_1, \ldots$ mit $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1$ die Anzahl der Führungszeitpunkte der Irrfahrt

$$S_t = \sum_{i=1}^{t} Y_i.$$

Vergleichen Sie auch die empirische Verteilungsfunktion des relativen Anteils der Führungszeitpunkte mit der Verteilungsfunktion der Arcussinus-Verteilung.

H 31 Alternativaufgabe zu H30

Seien $Y_1, \ldots, Y_T$ iid Zufallsvariablen mit $Y_1 \sim \mathbf{SB}$. Wir betrachten eine Abbildung

$$r : \{-1, 1\}^T \longrightarrow \{0, \ldots, T\} \cup \{\infty\}$$

und definieren Zufallsvariablen $\widetilde{Y}_1, \ldots, \widetilde{Y}_T$ durch

$$\widetilde{Y}_i = \begin{cases} Y_i, & \text{falls } i \leq r(Y_1, \ldots, Y_T) \\ -Y_i, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(i) Für $k \in \mathbb{N}$ sei $r(y_1, \ldots, y_T) = \inf\{t \in \{1, \ldots, T\} : y_1 + \ldots + y_t = k\}$. Zeigen Sie, dass

$$(\widetilde{Y}_1, \ldots, \widetilde{Y}_T) \quad \text{iid und} \quad \widetilde{Y}_1 \sim \mathbf{SB}. \tag{$*$}$$

(ii) Geben Sie mit Hilde von (i) eine stochastische Interpretation des Spiegelungsprinzips.

(iii) Konstruieren Sie eine Abbildung r, so dass $(*)$ nicht erfüllt ist.