Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
A. Fromkorth
A. Janoschek
A. Keller

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

28.04.2008

Einführung in die Stochastik
6. Übung
Gruppenübung: 05.05.2008
Abgabe Hausübung: 13.05.2008

Gruppenübung

G 8 Sei $n_0(n) \in \{0, 1 \ldots, n\}$ eine Folge natürlicher Zahlen mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n_0(n)}{n} = p \in (0, 1).$$

Des Weiteren betrachten wir eine Folge von Zufallsvariabeln X_n mit $X_n \sim H(n, n_0(n), k)$. Zeigen Sie für $\ell \in \{0, 1, \ldots, k\}$:

$$\lim_{n\to\infty} P(\{X_n = \ell\}) = \binom{k}{\ell} p^\ell (1-p)^{k-\ell}.$$

G 9 Zur Feststellung der Anzahl N der in einem bestimmten Revier lebenden Rothirsche wurden in einer Fangaktion insgesamt 7 Tiere gefangen und gekennzeichnet. Anschließend wurden die gefangenen Tiere im gleichen Revier wieder freigelassen. Nach einer gewissen Zeit wurde eine weitere Fangaktion durchgeführt. Dabei wurden m Rothirsche gefangen und man stellte fest, dass genau $k\,(k \leq m)$ gefangene Tiere gekennzeichnet waren. Es wird angenommen, dass zwischen beiden Fangaktionen keine Zu- oder Abwanderungen von Rothirschen in dem beobachteten Revier stattgefunden haben.

(i) Sei X die Zufallsvariable, welche die Anzahl der gefangenen und markierten Rothirsche in der zweiten Fangaktion angibt. Welche Verteilung hat X?

(ii) Sei $m = 3$ und $k = 2$. Welche Anzahl N an Rothirschen im betrachteten Revier ist am wahrscheinlichsten?

Hausübung

H 23 Seien X, Y zwei unabhängige, diskrete Zufallsvariablen über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Werten in $\mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

$$\forall k \in \mathbb{Z} : P(\{X + Y = k\}) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} P(\{X = l\}) \cdot P(\{Y = k - l\}).$$

Bemerkung: Dieser Zusammenhang wird als *Faltung* bezeichnet.

Berechnen Sie die Verteilung von $X + Y$ für unabhängige Zufallsvariablen X, Y, mit

$X \sim \mathbf{B}(n, p)$ und $Y \sim \mathbf{B}(m, p)$, sowie
$X \sim \mathbf{P}(\lambda)$ und $Y \sim \mathbf{P}(\mu)$

Hinweis: Zeigen Sie

$$\sum_{l=0}^{k} \binom{\alpha}{l} \cdot \binom{\beta}{k-l} = \binom{\alpha+\beta}{k}$$

mittels wahrscheinlichkeitstheoretischer Argumente, und wenden Sie diese Gleichung an.

H 24 Sei X eine diskrete Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Werten in $\mathbb{N}$ und $P(\{X = n\}) > 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die Äquivalenz von (i) und (ii):

(i) X ist geometrisch verteilt.

(ii) Die Verteilung von X hat die Eigenschaft der Gedächtnislosigkeit, d.h.

$$P(\{X > n + k\} | \{X > n\}) = P(\{X > k\})$$

für alle n, $k \in \mathbb{N}$. Interpretation ?

H 25 In einem Flugzeug haben 224 Passagiere Platz. Da der Fluggesellschaft aus Erfahrung bekannt ist, daß ein Passagier auf einer bestimmten Flugstrecke mit der Wahrscheinlichkeit von 2% nicht zum Abflug erscheint, werden für diesen Flug 227 Buchungen vorgenommen. Es wird angenommen, daß die Entscheidungen der Passagiere, ob der Flug angetreten wird, unabhängig voneinander zustande kommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß alle zum Abflug erscheinen Passagiere einen Platz erhalten

(i) exakt

(ii) näherungsweise unter Verwendung der Poissonapproximation.

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe **H 23**.

H 26 Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Die Ruinwahrscheinlichkeit bei der in Null gestarteten und durch $(-a)$ und b beschränkten symmetrischen Bernoulli - Irrfahrt ist $\frac{b}{b+a}$.