Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
A. Fromkorth
A. Janoschek
A. Keller

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

28.04.2008

Einführung in die Stochastik
5. Übung
Gruppenübung: 28.04.2008
Abgabe Hausübung: 05.05.2008

Gruppenübung

G 7 Im folgenden sei $\Omega' \neq \emptyset$ eine abzählbare Menge, auf der wir eine Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$g : \Omega' \to \mathbb{R}_+$$

betrachten. Ferner sei für jedes $\omega' \in \Omega'$ eine Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$g_{\omega'} : \Omega' \to \mathbb{R}_+$$

gegeben.

(i) Zeigen Sie, daß

$$f(\omega) := g(\omega_0) \cdot g_{\omega_0}(\omega_1) \cdot g_{\omega_1}(\omega_2) \cdots g_{\omega_{n-1}}(\omega_n), \qquad \omega = (\omega_0, \dots, \omega_n) \in \Omega$$

eine Wahrscheinlichkeitsfunktion auf $\Omega = (\Omega')^{n+1}$ definiert.

(ii) Lesen Sie Aufgabe H19(i) und modellieren Sie dann durch geeignete Wahl von Ω', g und $g_{\omega'}$ folgendes Warteschlagenproblem:
Ein Skilft kann in einer Zeitscheibe genau einen wartenden Skifahrer aufnehmen. pro Zeitscheibe trifft/treffen mit Wahrscheinlichkeit

$p_0 > 0$ kein neuer Skifahrer am Lift ein,
$p_1 > 0$ ein neuer Skifahrer am Lift ein,
$p_2 > 0$ zwei neue Skifahrer am Lift ein.

Es gilt $p_0 + p_1 + p_2 = 1$, und das Eintreffen der Skifahrer in verschiedenen Zeitscheiben geschieht unabhängig. Zu Betriebsbeginn warten bereits 5 Skifahrer vor dem Lift. Gesucht ist ein stochastisches Modell für die Längen $X_0, \dots, X_n$ der Warteschlangen.

Hausübung

H 18 Sei N eine Menge mit $n > 0$ Elementen. Betrachten Sie Stichproben vom Umfang $k > 0$ aus der Menge N ohne Berücksichtigung der Reihenfolge mit Wiederholungen. Geben Sie einen geeigneten Ergebnisraum an und bestimmen Sie dessen Mächtigkeit.

H 19 Betrachten Sie in der Situation von Aufgabe G7 die Projektionen $X_i : \Omega \to \Omega'$ für $i = 0, \dots, n$. Ferner sei P das f (G7(i)) definierte Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$.

(i) Zeigen Sie

$$P(\{X_i = \omega_i\} | \{X_{i-1} = \omega_{i-1}\}) = g_{\omega_{i-1}}(\omega_i)$$

für $i = 1, \dots, n$ und alle $\omega_{i-1}, \omega_i \in \Omega'$ mit $P(\{X_{i-1} = \omega_{i-1}\}) > 0$.

(ii) Bestimmen Sie

$$P(\{X_i = \omega_i\} | \{(X_0, \ldots, X_{i-1}) = (\omega_0, \ldots \omega_{i-1})\})$$

für $i = 1, \ldots, n$ und alle $\omega_0, \ldots, \omega_i \in \Omega'$ mit $P(\{(X_0, \ldots, X_{i-1}) = (\omega_0, \ldots, \omega_{i-1})\}) > 0$.

(iii) Modellieren Sie durch geeignete Wahl von Ω' und g sowie $g_{\omega'}$ folgende Variante des Spiels aus Beispiel II.1.3: Hat der Spieler den Betrag b erreicht, so schenkt er den Croupiers einen Euro und setzt das Spiel fort. Hat er sein Geld verspielt, so stiehlt er seinem Nachbarn einen Euro. Er beendet sein Spiel nach einer vorgegebenen Anzahl von Runden.

H 20 Auf einem Jahrmarkt wird folgendes Spiel angeboten:
In einer Urne befinden sich 20 Kugeln. Die ansonsten identischen Kugeln unterscheiden sich nur in der Farbe: es gibt 7 rote und 13 schwarze Kugeln. Der Spieler zieht im ersten Durchgang zwei Kugeln aus der Urne. Dann werden die zwei Kugeln wieder zurückgelegt und gut mit den restlichen Kugeln vermischt. Der Spieler zieht dann wieder zwei Kugeln. Er hat gewonnen und bekommt das Doppelte seines Einsatzes zurück, wenn die Anzahl der gezogenen roten Kugeln aus beiden Durchgängen gerade ist.

(i) Modellieren Sie dieses Spiel mit Hilfe eines geeigneten Wahrscheinlichkeitsraumes.

(ii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

A : Der Spieler zieht als erstes zwei rote Kugeln.
B : Der Spieler gewinnt.

H 21 Programmieraufgabe
Bestimmen Sie für das Spiel aus Beispiel II.1.3 durch direkte Simulation in den Fällen

$$\begin{array}{lll} a = 20, & b = 60, & p = 0.5 \\ a = 20, & b = 60, & p = 0.8 \\ a = 4, & b = 15, & p = 0.5 \end{array}$$

näherungsweise die Verteilungsfunktionen der Spieldauer. Geben Sie außerdem jeweils für $q = 1/4, 1/2, 3/4$ Näherungswerte für die q-Quantile dieser Verteilungsfunktionen an.

H 22 Alternativaufgabe zu H21
Für die Menge N mit $|N| = n$ sei $S(n, k)$ die Anzahl der Möglichkeiten, N in k Teilmengen zu zerlegen. Zeigen Sie, dass folgende Rekursionsformel gilt

$$S(n, k) = k \cdot S(n-1, k) + S(n-1, k-1), \quad n, k > 0.$$

Dabei sei $S(0, 0) = 1$ und $S(0, k) = 0$ für $k > 0$ sowie $S(n, 0) = 0$ für $n > 0$.
Bestimmen Sie $S(7, 3)$.