Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
A. Fromkorth
A. Janoschek
A. Keller

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

21.04.2008

Einführung in die Stochastik

4. Übung
Gruppenübung: 21.04.2008
Abgabe Hausübung: 28.04.2008

Gruppenübung

G 5 Gegeben seien zwei unabhängige Zufallsvariablen, die

$$\begin{aligned} P(\{X_1 = 0\}) &= 0.4 & \quad P(\{X_2 = 0\}) &= 0.5 \\ P(\{X_1 = 1\}) &= 0.3 & P(\{X_2 = 1\}) &= 0.2 \\ P(\{X_1 = 2\}) &= 0.2 & P(\{X_2 = 2\}) &= 0.1 \\ P(\{X_1 = 3\}) &= 0.1 & P(\{X_2 = 3\}) &= 0.1 \\ & & P(\{X_2 = 4\}) &= 0.1 \end{aligned}$$

erfüllen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(\{X_1 + X_2 = k\})$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

G 6 Beim Auszählen von Zellen in 50 Quadranten eines Hämazytometers ergaben sich die folgenden Werte:

1	2	2	2	4	4	4	5	5	5	2	1	2	2	7	6	7	4	4	4	4	4	4	4	4
4	4	4	4	5	5	6	6	2	3	3	3	3	3	6	7	7	7	5	2	2	2	7	9	9

(i) Skizzieren Sie die empirische Verteilungsfunktion $F_n(\cdot; x_1, \ldots, x_{50})$.

(ii) Bestimmen Sie einen möglichst einfachen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega', \mathfrak{A}', P')$ und darauf eine Zufallsvariable X', so dass für deren Verteilungsfunktion

$$F_{X'} = F_n(\cdot; x_1, \ldots, x_{50})$$

gilt.

Hausübung

H 13 Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Für $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{A}$ mit $P(A_i) = 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$ folgt $P(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) = 1$.

(ii) Sei $A_1, A_2, \ldots$ eine paarweise disjunkte Folge in $\mathfrak{A}$, dann sind die Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ auch paarweise unabhängig.

(iii) Seien X, Y diskrete Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum. Es gilt:

$$X, Y \quad \text{iid} \Longrightarrow P(\{X = Y\}) = 0.$$

(iv) Sei $\mathfrak{A}$ die Potenzmenge der reellen Zahlen, dann gilt

Die Menge $A = \{\omega \in \mathbb{R} : P(\{\omega\}) > 0\}$ ist höchstens abzählbar.

H 14 Beweisen Sie folgenden Spezialfall von Satz I.3.15:
Zwei Zufallsvariablen X_1, X_2 sind genau dann unabhängig, wenn

$$\forall M_1, M_2 \in \mathfrak{M} : \quad P(\{X_1 \in M_1\} \cap \{X_2 \in M_2\}) = P(\{X_1 \in M_1\})P(\{X_2 \in M_2\}).$$

Hinweis: Verwenden Sie Satz I.1.17.

H 15 Zeigen oder widerlegen Sie:
Ist C die disjunkte Vereinigung von Ereignissen C_1, $C_2, \dots$ mit $P(C_i) > 0$ und stimmen die die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(A|C_i)$ überein, so ist $P(A|C) = P(A|C_1)$.

H 16 **Hinweis:** Für die Lösung der folgenden Programmieraufgaben ist die Wahl der Programmiersprache und des Zufallszahlengenerators Ihnen überlassen. Bitte geben Sie nicht Ihren Programmcode, sondern nur die geforderte grafische Darstellung ab.

(i) Schreiben Sie ein Programm, dass einen wiederholten Münzwurf simuliert. Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses *Kopf* sei durch $p \in (0, 1)$ gegeben.
Stellen Sie für unterschiedliche p das Verhalten der relativen Häufigkeiten als Funktion der Wiederholungszahl grafisch dar.

(ii) In raquetball (a game that in some sense is similar to squash), a player continues to serve as long as she is winning; a point is scored only when a player is serving and wins the volley. The first player to win 21 points wins the game. Assume that you serve first and have a probability of 0.6 winning a volley when you serve and probability of 0.5 when your opponent serves. Estimate, by simulation, the probability that you will win the game.
Again, plot the behaviour of the relative frequencies with respect to the number of games.
Does the fact that you serve first, increase your chance to win the game?
Hint: Winning the game, it is not necessary to be 2 points ahead, that is you can win 21:20.

H 17 **Alternativaufgabe zur Programmieraufgabe**
Seien X, Y Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Zeigen Sie, dass auch $X + Y$ eine Zufallsvariable auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum ist.