Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
A. Fromkorth
A. Janoschek
A. Keller

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

14.04.2008

# Einführung in die Stochastik
## 3. Übung
## Gruppenübung: 14.04.2008
## Abgabe Hausübung: 21.04.2008

### Gruppenübung

**G 3** Betrachten Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und eine Folge $(A_i)_{i\in J}$ in $\mathfrak{A}$. Beweisen Sie die folgende Äquivalenz:

(i) $(A_i)_{i\in J}$ ist unabhängig.

$\Longleftrightarrow$ (ii) Für alle endlichen, nichtleeren Mengen $J_1$, $J_2 \subseteq J$ mit $J_1 \cap J_2 = \emptyset$ und $P(\cap_{j_2\in J_2} A_{j_2}) \neq 0$ gilt

$$P(\cap_{j_1\in J_1} A_{j_1} | \cap_{j_2\in J_2} A_{j_2}) = P(\cap_{j_1\in J_1} A_{j_1}).$$

**G 4** Betrachten Sie das Zufallsexperiment und den zugehörigen Wahrscheinlichkeitsraum aus Beispiel I.1.15 (Dartscheibe).

(i) Definieren Sie Zufallsvariablen $X$ und $Y$, welche die erste Koordinate bzw. den Winkel (in Polarkoordinaten) des Auftrittspunktes der Dartpfeiles beschreiben.

(ii) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktionen von $X$ und $Y$.

### Hausübung

**H 9** Sei $(X_1, \ldots, X_n)$ eine unabhängige Folge von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, die jeweils nur Werte in $\mathbb{Z}$ annehmen, d.h.

$$\forall \omega \in \Omega: \quad X_i(\omega) \in \mathbb{Z}.$$

Zeigen Sie, dass für $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $A \subseteq \mathbb{Z}^k$ und $B \subseteq \mathbb{Z}^{n-k}$ die folgende Aussage gilt.

$$\begin{aligned} &P(\{(X_1, \ldots, X_k) \in A\} \cap \{(X_{k+1}, \ldots, X_n) \in B\}) \\ &\quad = P(\{(X_1, \ldots, X_k) \in A\}) \cdot P(\{(X_{k+1}, \ldots, X_n) \in B\}). \end{aligned}$$

Nehmen wir nun an, dass $X_1, \ldots, X_n$ zusätzlich identisch verteilt sind. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$P(\{(X_{k+1}, \ldots, X_n) \in B\}) = P(\{(X_1, \ldots, X_{n-k}) \in B\}).$$

**Bemerkung:** Dieses Resultat ergibt sich auch als Spezialfall einer allgemeinen Aussage über iid Zufallsvariablen, siehe Irle (2001, p. 163, 169).
**Hinweis:** Verwenden Sie Satz I.3.15

**H 10** Betrachten Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und Ereignisse $A$, $B$, $C \in \mathfrak{A}$. Zeigen Sie:

(i) Sind $A$ und $B$ sowie $B$ und $C$ unabhängig und gilt $C \subseteq A$, dann sind auch $A \setminus C$ und $B$ unabhängig.

(ii) Eine Menge $M$ mit $P(M) = 0$ wird als *Nullmenge* bezeichnet. Ist $A$ eine Nullmenge, oder Komplement einer Nullmenge, dann sind $A$ und jede beliebige Menge $B$ unabhängig.

Wir betrachten jetzt zusätzlich eine Folge von paarweise disjunkten Ereignissen $A_1$, $A_2$, ... in $\mathfrak{A}$. Zeigen Sie:

(iii) Sind für $n \in \mathbb{N}$ die Ereignisse $A_n$ und $B$ unabhängig, dann sind auch $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und $B$ unabhängig.

**H 11** Wir betrachten eine unabhängige Folge von Zufallsvariablen $(X_i)_{i\in I}$ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Beweisen Sie die folgende Aussage:

Für jede Folge $(M_i)_{i\in I}$ in $\mathfrak{M}$ gilt

(i) $Y_i := 1_{M_i} \circ X_i$ ist für jedes $i \in I$ eine ZV.

(ii) die Folge $(Y_i)_{i\in I}$ ist unabhängig.

**H 12** Sei $X$ eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und bezeichne $F_X$ ihre Verteilungsfunktion. Zeigen Sie, dass $F_X$ folgende Eigenschaften besitzt

(i) $F_X$ ist monton wachsend.

(ii) $F_X$ ist rechtsseitig stetig.

(iii) $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$ und $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$.

Zeigen Sie außerdem, dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$P(\{X = x\}) = F_X(x) - \lim_{y\to x-} F_X(y)$$

und

$$P(\{X = x\}) = 0 \Leftrightarrow F_X \text{ stetig in } x$$

gilt.