Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K. Ritter
A. Fromkorth
A. Janoschek
A. Keller

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

07.04.2008

Einführung in die Stochastik
2. Übung
Gruppenübung: 07.04.2008
Abgabe Hausübung: 14.04.2008

Gruppenübung

G 1 In einem Experiment sollen Familien mit zwei Kindern hinsichtlich der Geschlechterkombinationen der zwei Kinder untersucht werden. Wir nehmen an, dass die Wahrscheinlichkeit für ein Kind, ein Mädchen bzw. ein Junge zu sein, jeweils gleich 0.5 ist.
Das Experiment besteht darin, eine Familie (mit zwei Kindern) zufällig auszuwählen.

(i) Geben Sie den Wahrscheinlichkeitsraum an, der diesem Zufallsexperiment zugrunde liegt!

(ii) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Familie einen Jungen hat?

In einem weiteren Experiment werden nur Familien mit zwei Kindern betrachtet, von denen zumindest eines ein Junge ist.

(iii) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass auch das andere Kind ein Junge ist?

In einem dritten Experiment (es werden wieder nur Familien mit zwei Kindern betrachtet), besuchen wir eine dieser Familien. Die Tür wird uns von einem Jungen geöffnet.

(iv) Wie hoch ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass auch das andere Kind ein Junge ist? Überlegen Sie zuerst, wie sich der Ergebnisraum für das dritte Experiment im Vergleich zu den vorangegangenen ändert!

G 2 Sei $\mathfrak{A}$ die Menge aller Teilmengen von $\Omega = \mathbb{N}$. Das Wahrscheinlichkeitsmaß P_n auf $\mathfrak{A}$ sei definiert durch

$$P_n(A) = \frac{1}{n}\#\{k \in \mathbb{N} : 1 \le k \le n,\, k \in A\}, \qquad A \in \mathfrak{A}.$$

Wenn der Grenzwert von $P_n(A)$ existiert, nennen wir

$$d(A) := \lim_{n\to\infty} P_n(A)$$

die *Dichte* von A. Mit $\mathcal{D}$ bezeichnen wir die Menge aller Teilmengen von Ω, die eine Dichte besitzen.

Zeigen Sie, dass $\emptyset \in \mathcal{D}$, $\Omega \in \mathcal{D}$ und dass $\mathcal{D}$ abgeschlossen ist unter der Bildung von Komplementen, Differenzen und von Vereinigungen endlich vieler disjunkter Mengen.

Hausübung

H 5 Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $B \in \mathfrak{A}$ eine Menge mit $P(B) > 0$. Wir definieren die Abbildung $Q : \mathfrak{A} \to [0,1]$ durch

$$Q(A) = P(A|B).$$

Zeigen Sie, dass auch Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.
Bestimmen Sie $Q(A|B)$ für $A \in \mathfrak{A}$.

H 6 Fortsetzung Aufgabe G2
Wie in Aufgabe G2 sei P_n das Wahrscheinlichkeitsmaß auf der Menge $\mathfrak{A}$ aller Teilmengen von $\mathbb{N} = \Omega$ und

$$P_n(A) = \frac{1}{n}\#\{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq n,\, k \in A\}, \qquad A \in \mathfrak{A}$$
$$d(A) := \lim_{n\to\infty} P_n(A) \qquad \text{falls existent.}$$

Mit $\mathcal{D}$ bezeichnen wir wiederum die Menge aller Teilmengen von Ω, die eine Dichte besitzen.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{D}$ *nicht* abgeschlossen ist unter der Bildung von Vereinigungen von abzählbar vielen disjunkten Mengen.

(b) Sei $\mathcal{K}_a := \{ka : k \in \mathbb{N}\}$, $a \in \mathbb{N}$. Ermitteln Sie die Dichte $d(\mathcal{K}_a)$.

H 7 Zwei Medikamente M_1 und M_2 werden in den Städten A und B getestet. In A werden von 16 Patienten, die das Medikament M_1 nehmen, 4 gesund, ebenso 11 von 40 Patienten, die das Medikament M_2 nehmen. In B werden 29 Patienten von 40 nach Einnahme von M_1 und 12 von 16 Patienten nach Einnahme von M_2 gesund.

Zeigen Sie, dass die Heilungsquote von Medikament 2 in beiden Städten größer ist, als die von Medikament 1, dass aber bei Zusammenfassung der Daten für beide Städte Medikament 1 sich als das erfolgreichere erweist.

H 8 Sei $\Omega \neq \emptyset$ höchstens abzählbar. Beweisen Sie die folgende Aussage:
Zu jeder σ-Algebra $\mathfrak{A}$ in Ω existiert eine Familie $(B_i)_{i\in I}$ von Ereignissen $B_i \in \mathfrak{A}$, so dass

(i) $\cup_{i\in I} B_i = \Omega$,

(ii) $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i, j \in I$ mit $i \neq j$, und

(iii) für jedes Ereignis $A \in \mathfrak{A}$ existiert eine Menge $J \subseteq I$, so dass, $A = \cup_{j\in J} B_j$

gelten.