

Graphen und Algorithmen

Vorlesung #8: Färbungsprobleme

Dr. Armin Fügenschuh

Technische Universität Darmstadt

WS 2007/2008

Übersicht

- * Knotenfärbung (vs. Kanten- & Kartenfärbung)
- * Satz von Brooks
- * Algorithmen zur Knotenfärbung
 - * Sequentielle Färbung
 - * Welsh-Powell-Algorithmus
 - * Algorithmus von Matula, Marble & Isaacson
- * Kritische Graphen
- * Satz von Dirac und Folgerungen
- * Cliques
- * Satz von Mycielski

Fluglinienplanung

- * Eine Fluggesellschaft möchte die folgenden sieben Flüge wöchentlich durchführen:

- (A) Budapest → Turin → Bordeaux → London
- (B) Barcelona → Genua → München → London
- (C) Wien → Bordeaux → London → Porto
- (D) Wien → Warschau → Genua
- (E) Wien → Athen → Bordeaux
- (F) Hamburg → München → London
- (G) Hamburg → Zürich → Genua

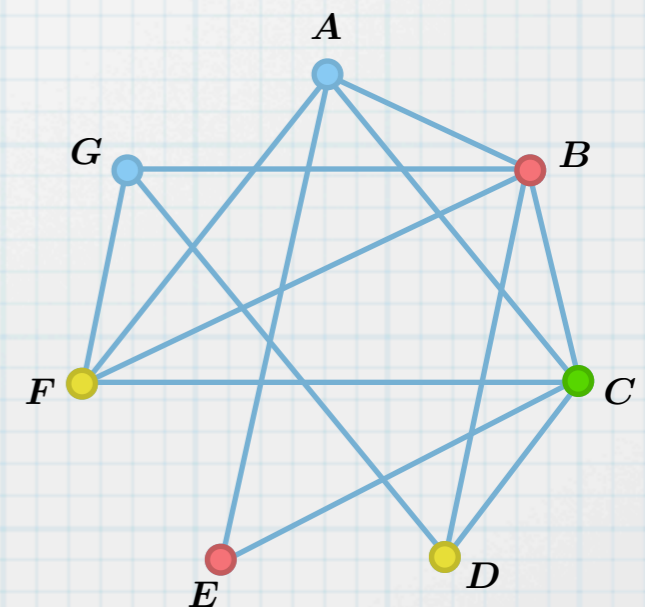
- * Alle Flüge starten und enden in Frankfurt.
- * Jedes Zwischenziel soll nicht öfter als ein Mal am Tag angefliegen werden.
- * Alle Flüge sollen nur montags, mittwochs oder freitags stattfinden.
- * Ist es möglich, unter diesen Randbedingungen einen Flugplan aufzustellen?
- * Modellierung:

Graph mit sieben Knoten (A bis G) für die Flüge.

Kante zwischen zwei Knoten, wenn die selbe Stadt als Zwischenziel angefliegen wird.

Die Tage Mo., Mi. und Fr. sollen den Knoten so zugeordnet werden, dass adjazente Knoten unterschiedliche Tage bekommen.

- * Ersetze die drei Tage durch drei Farben, so entsteht ein Färbungsproblem.
- * Kann der Graph mit drei Farben gefärbt werden?



Knotenfärbung und chromatische Zahl

* Definition 1:

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine **Knotenfärbung** von G ist eine Abbildung $f : V \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $f(u) \neq f(v)$ für alle $\{u, v\} \in E$.

Eine **k -Färbung** von G ist eine Knotenfärbung f mit $|f(V)| = k$. In diesem Fall wird G auch als **k -färbbar** bezeichnet.

* Definition 2:

Die kleinste Zahl n , für die es eine n -Färbung des Graphen G gibt, heißt **chromatische Zahl** von G und wird mit $\chi(G)$ bezeichnet. Ist $\chi(G) = k$, so wird G als **k -chromatisch** bezeichnet.

* Bemerkung:

Hat ein Graph eine Schlinge an einem Knoten v , dann ist v adjazent mit sich selber. Somit ist keine Färbung möglich.

Auch Mehrfachkanten können bei Färbungsfragestellungen ignoriert werden.

O.B.d.A. betrachten wir nachfolgend nur schlichte Graphen.

* Satz 3:

Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

(a) Hat der Graph n Knoten, so ist $\chi(G) \leq n$.

(b) Ist H ein Untergraph von G , so ist $\chi(H) \leq \chi(G)$.

(c) Ist v ein Knoten von G , so ist $\chi(G) \leq \chi(G - v) + 1$.

(d) $\chi(K_n) = n$ für alle $n \geq 1$.

(e) Ist K_n ein Untergraph von G , so ist $\chi(G) \geq n$.

(f) Sind G_1, \dots, G_n die Zusammenhangskomponenten von G , so ist $\chi(G) = \max\{\chi(G_i) : 1 \leq i \leq n\}$.

* Beispiel: Da der K_4 ein Untergraph des Flugliniengraph ist, gibt es also keine 3-Färbung.

Chromatische Zahl und maximaler Knotengrad

* **Definition 4:**

Sei G ein Graph. Mit $\Delta(G) := \max\{\deg(v) : v \in V(G)\}$ bezeichnen wir den **maximalen Knotengrad**.

* **Satz 5:**

Sei G ein Graph. Dann gilt $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

* Beweis (durch Induktion über die Anzahl der Knoten n von G):

Induktionsanfang, $n = 1$. Dann ist $G = K_1$, $\chi(G) = 1$ und $\Delta(G) = 0$.

Sei die Aussage wahr für alle Graphen mit $n - 1$ Knoten und G ein Graph mit n Knoten.

Sei v ein Knoten von G . Der Untergraph $G - v$ hat dann $n - 1$ Knoten.

Somit gilt nach Induktionsvoraussetzung $\chi(G - v) \leq \Delta(G - v) + 1$.

Wähle eine Knotenfärbung von $G - v$ mit $\Delta(G - v) + 1$ Farben.

Knoten v hat höchstens $\Delta(G)$ Nachbarn in G .

Diese Nachbarn benutzen höchstens $\Delta(G)$ Farben der Färbung von $G - v$.

1. Fall, $\Delta(G) = \Delta(G - v)$.

Dann gibt es (mind.) eine Farbe, die für die Nachbarn von v nicht verwendet wurde.

Verwende diese Farbe, so erhalten wir eine Färbung mit $\Delta(G) + 1$ Farben für G .

Also ist $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

2. Fall, $\Delta(G) \neq \Delta(G - v)$, d.h. $\Delta(G) > \Delta(G - v)$.

Färbe v mit einer neuen Farbe.

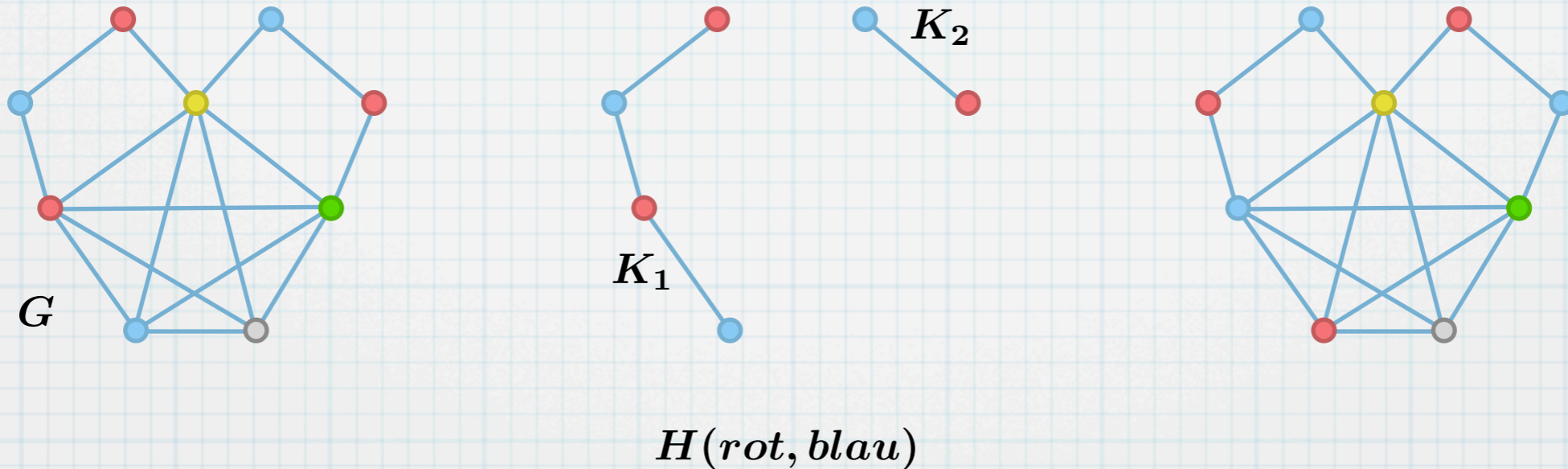
Dann erhalten wir eine $(\Delta(G - v) + 2)$ -Färbung von G .

Aus $\Delta(G - v) < \Delta(G)$ folgt $\Delta(G - v) + 2 \leq \Delta(G) + 1$.

Also ist auch in diesem Fall $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Kempe-Ketten

- * **Definition 6:**
Sei G ein Graph mit einer Färbung, die aus mind. zwei Farben i, j besteht. Sei $H(i, j)$ der Untergraph von G , die aus allen Knoten von G besteht, die entweder mit i oder mit j gefärbt sind. Eine **Kempe-Kette** K ist eine Zusammenhangskomponente von $H(i, j)$.
- * Beobachtung: Wenn man in einer Kempe-Kette K die Farben i und j vertauscht, so entsteht wiederum eine zulässige Färbung von G .
- * **Definition 7:**
Das Verfahren der Neufärbung einer Kempe-Kette K wird als **Kempesche Kettenumfärbung** bezeichnet.
- * Beispiel:

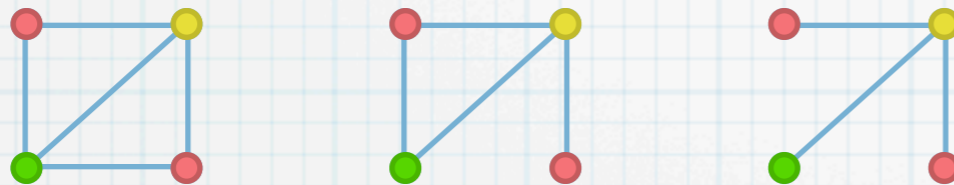


Der Satz von Brooks

- * **Satz 8** (Brooks, 1941):
Sei G zusammenhängend und nicht vollständig mit $\Delta(G) \geq 3$. Dann gilt $\chi(G) \leq \Delta(G)$.
- * Beweis (durch Induktion über die Anzahl der Knoten n von G):

Induktionsanfang, $n = 4$ (da $\Delta(G) \geq 3$).

Da G nicht vollständig ist (aber schlicht und zusammenhängend), können es nur die folgenden Graphen sein:



In jedem der drei Fälle ist die chromatische Zahl ≤ 3 .

Sei nun $n \geq 5$ und die Aussage wahr für $n - 1$.

Wir wissen (siehe Beweis von Satz 5), dass G mit $\Delta(G)$ Farben färbbar ist, wenn es in G einen Knoten v gibt mit $\deg(v) < \Delta(G)$, da dessen Nachbarn zusammen höchstens $\Delta(G) - 1$ Farben haben.

Also ist der Satz in diesem Fall bewiesen.

Es bleibt nur der Fall, dass G ein Graph ist, in dem kein solcher Knoten v existiert.

Dann ist $\deg(v) = \Delta(G) =: d$ für jeden Knoten v .

Also ist G dann ein d -regulärer Graph.

Bleibt zu zeigen, dass G eine d -Färbung hat.

Sei v ein beliebiger Knoten von G .

Nach Induktionsannahme hat $G - v$ eine d -Färbung.

Wenn die Nachbarn von v weniger als d Farben verbrauchen, dann kann v mit einer nicht verbrauchten Farbe gefärbt werden. Dadurch erhalten wir eine d -Färbung von G .

Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):

Andernfalls verbrauchen die d Nachbarn v_1, \dots, v_d von v die Farben $1, \dots, d$.

Seien i, j zwei Farben und v_i, v_j die Nachbarn von v in der jeweiligen Farbe.

Seien K_i, K_j die Zusammenhangskomponenten von $H(i, j)$, die v_i bzw. v_j enthalten.

1. Fall, $K_i \neq K_j$ für ein Paar von Farben i, j .

Wir führen in der Kempe-Kette K_i eine Umfärbung durch.

Damit hat auch v_i die Farbe j .

Die Nachbarn von v benutzen jetzt nur noch die Farben $1, \dots, i-1, i+1, \dots, d$.

Knoten v kann mit Farbe i gefärbt werden, und die Aussage ist gezeigt.

2. Fall, $K_i = K_j$ für alle Farben i, j .

Für festes i, j setze (zur Abkürzung) $H := K_i$.

Angenommen, $\deg_H(v_i) > 1$.

Dann hat v_i (mind.) zwei Nachbarn mit Farbe j .

Wenn wir jetzt alle Nachbarn von v_i betrachten (im gesamten Graphen G), so gibt es eine Farbe k , die dort nicht vorkommt.

Färbe jetzt v_i mit k .

Dann kann v mit i gefärbt werden. Fertig.

Analog argumentiert man für $\deg_H(v_j) > 1$.

Also kann im Folgenden $\deg_H(v_i) = \deg_H(v_j) = 1$ angenommen werden.

Sei $P = (v_i, \dots, v_j)$ ein Weg in H .

Angenommen, es gibt einen Knoten u in P mit $\deg_H(u) \geq 3$.

Sei u ferner der erste derartige Knoten in P , und o.B.d.A habe u die Farbe i .

Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):

In G sind (mind.) drei Nachbarn von u mit Farbe j gefärbt.

Also gibt es eine Farbe k , die für die Nachbarn von u nicht verwendet wurde.

Färbe nun u mit Farbe k .

Dann können die Knoten von v_i (einschl.) bis u (ausschl.) in P umgefärbt werden.

Danach hat v_i die Farbe j .

v_j hatte ohnehin die Farbe j .

Also kann v mit i gefärbt werden. Fertig.

Also bleibt der Fall, dass $\deg_H(u) = 2$ für alle Knoten u in P , $u \neq v_i, v_j$.

Das bedeutet $H = P$. H besteht aus einem Weg von v_i nach v_j .

Da dieses für beliebige Knoten v_i, v_j in der Nachbarschaft von v gilt, sind also alle Kempe-Ketten Wege.

Sei H wie bisher die zu v_i, v_j gehörige Kette, und K die zu v_i, v_k gehörige Kette, $j \neq k$.

Angenommen, es gibt einen Knoten $w \in H \cap K$, $w \neq v_i$.

Dann ist w mit Farbe i gefärbt und hat je zwei Nachbarn mit Farbe j und k .

Unter den Nachbarn von w in G gibt es dann eine Farbe l , die nicht verwendet wurde.

Färbe nun w mit Farbe l .

Dann können die Knoten von K zwischen w (ausschl.) und v_k (einschl.) umgefärbt werden.

Danach hat v_k die Farbe i . v_i hatte ohnehin die Farbe i .

Also kann v mit k gefärbt werden. Fertig.

Satz von Brooks (Ende)

* Beweis (Ende):

Es bleibt nur noch der Fall, dass v_i der einzige Knoten in $H \cap K$ ist.

Wir fassen zusammen: v_i und v_j sind Nachbarn von v . Die Kempe-Ketten H und K sind Wege von v_i nach v_j bzw. v_i nach v_k . Ihr gemeinsamer Schnitt ist nur der Endknoten v_i .

Angenommen, v_i und v_j sind nicht adjazent.

Sei w ein Knoten mit Farbe j in H , adjazent zu v_i .

In K führen wir eine Kempesche Kettenumfärbung durch. Dadurch ergibt sich eine neue zulässige Färbung von G .

Danach hat v_i die Farbe k und v_k die Farbe i .

w hat dann die Farbe i und ist weiterhin in H .

Da w adjazent zu v_i ist, liegt w auch in K (die Zusammenhangskomponente der Farben i und k).

Also haben wir jetzt einen weiteren Knoten gefunden, verschieden von v_i , der in H und K liegt. Fertig (siehe vorheriger Fall).

Angenommen, v_i und v_j sind adjazent.

Da v_i und v_j wie auch v beliebig gewählt waren, sind dann alle Knoten untereinander benachbart.

Dann wäre G der vollständige Graph K_d , im Widerspruch zur Annahme.

Zwei Beispiele

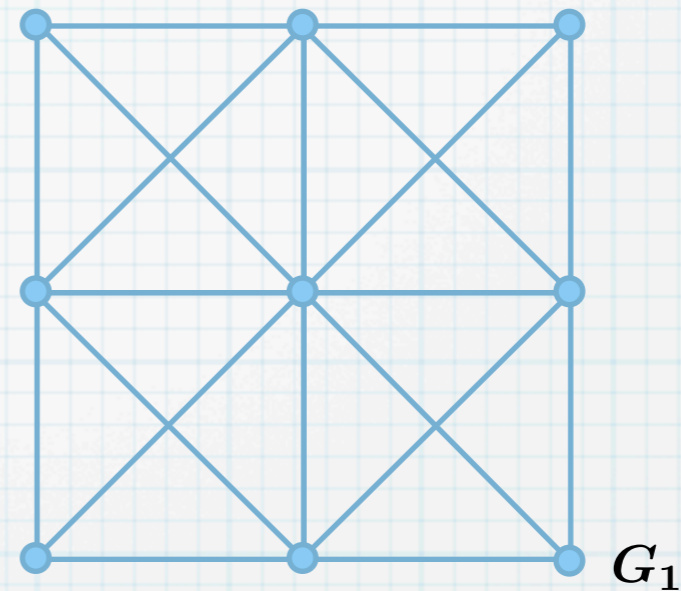
* In Kombination mit Satz 3(d) erhalten wir Abschätzungen für die chromatische Zahl.

* Beispiele:

* K_4 ist Untergraph von G_1 .

$$\Delta(G_1) = 8.$$

$$\text{Also ist } 4 \leq \chi(G_1) \leq 8.$$

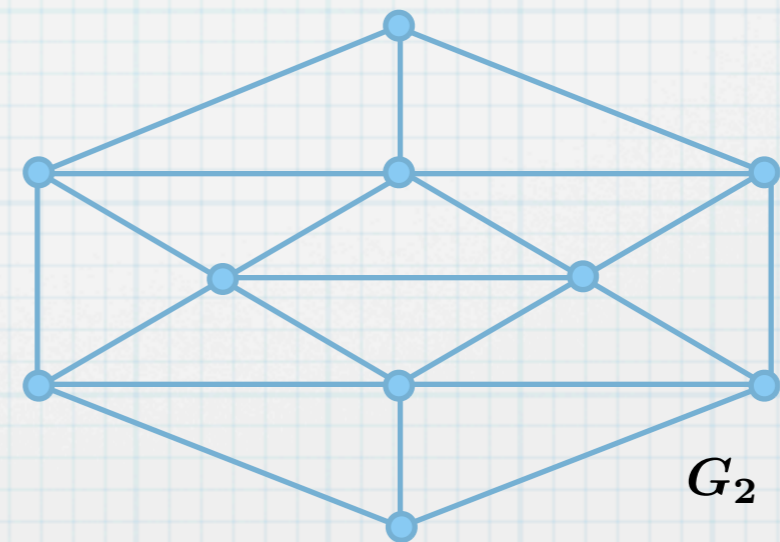


* „Birkhoffscher Diamant“ G_2 .

K_3 ist Untergraph von G_2 .

$$\Delta(G_2) = 5.$$

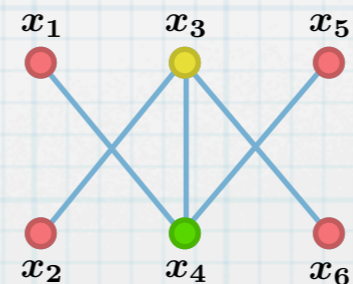
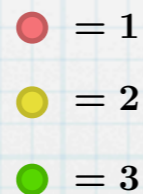
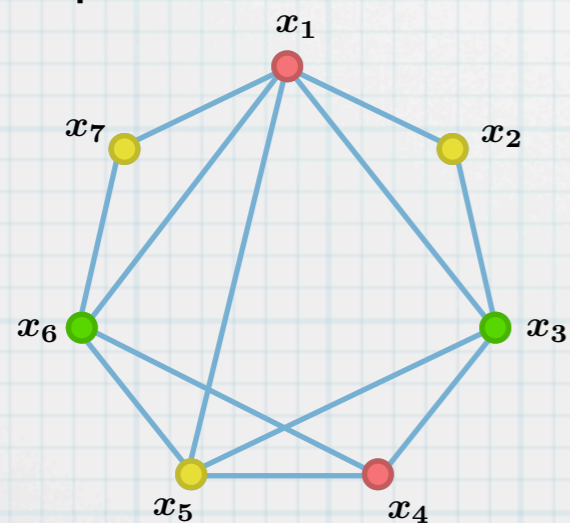
$$\text{Also ist } 3 \leq \chi(G_2) \leq 5.$$



Ein einfacher sequentieller Färbungsalgorithmus

- * Eingabe: Graph $G = (V, E)$, $V = \{x_1, \dots, x_n\}$
 - * Ausgabe: Färbung $f : V \rightarrow \{1, \dots, n\} =: C$
- (1) **algorithm** sequentialColoring
 - (2) $C(x_i) := C$ für alle $x_i \in V$
 - (3) **for** i from 1 to n **do**
 - (4) $c := \min C(x_i)$
 - (5) $f(x_i) := c$
 - (6) **for** alle Knoten y mit $\{x_i, y\} \in E$ **do**
 - (7) $C(y) := C(y) \setminus \{c\}$
 - (8) **end for**
 - (9) **end for**
 - (10) **end algorithm**

- * Beispiele:



Der Algorithmus von Welsh und Powell (1967)

* Eingabe: Graph $G = (V, E)$, $V = \{x_1, \dots, x_n\}$

* Ausgabe: Färbung $f : V \rightarrow \{1, \dots, n\} =: C$

(1) **algorithm** welshPowell

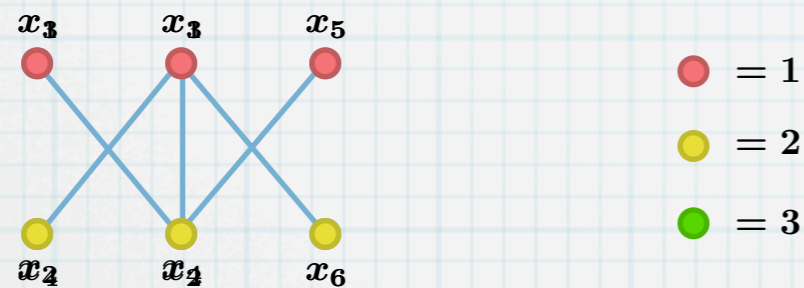
(2) sortiere V so, dass $\deg(x_1) \geq \dots \geq \deg(x_n)$

(3) sequentialColoring(G)

(4) **end algorithm**

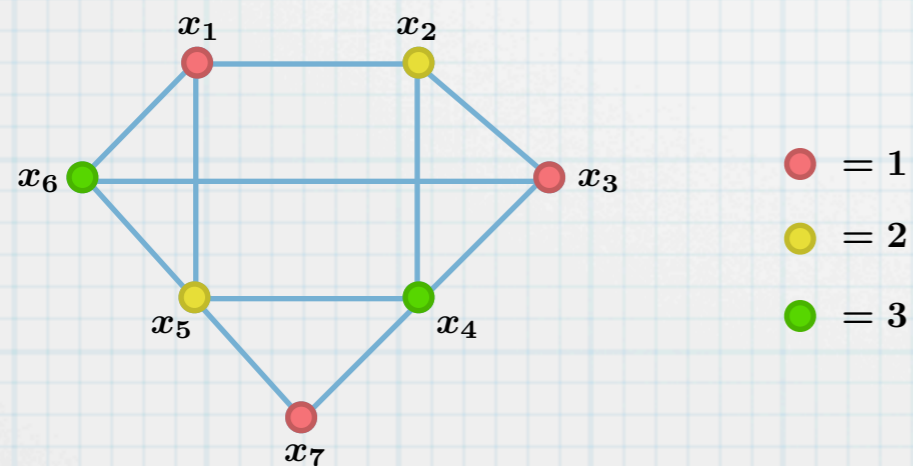
* Bemerkung: Der Algorithmus von Welsh–Powell liefert eine Färbung mit höchstens $\Delta(G) + 1$ Farben (siehe Beweis von Satz 5).

* Beispiel:



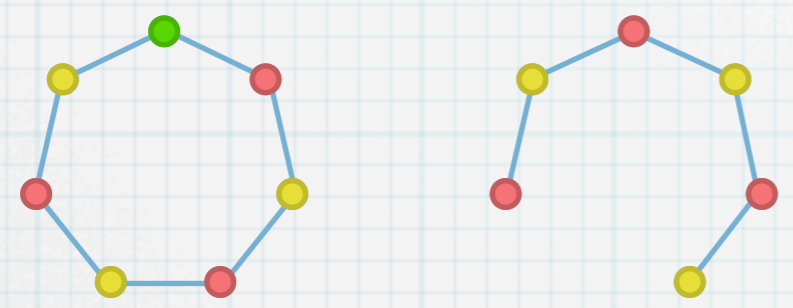
Der Algorithmus von Matula, Marble und Isaacson (1972)

- * Eingabe: Graph $G = (V, E)$, $V = \{x_1, \dots, x_n\}$
 - * Ausgabe: Färbung $f : V \rightarrow \{1, \dots, n\} =: C$
- (1) **algorithm** matulaMarbleIsaacson
 - (2) $v_n := \arg \min\{\deg(x_i) : 1 \leq i \leq n\}$
 - (3) **for** i **from** $n - 1$ **downto** 1 **step** -1 **do**
 - (4) $H := G - \{v_n, v_{n-1}, \dots, v_{i+1}\}$
 - (5) $v_i := \arg \min\{\deg_H(v) : v \in V(H)\}$
 - (6) **end for**
 - (7) sortiere V entsprechend v_1, \dots, v_n
 - (8) sequentialColoring(G)
 - (9) **end algorithm**
- * Beispiel:

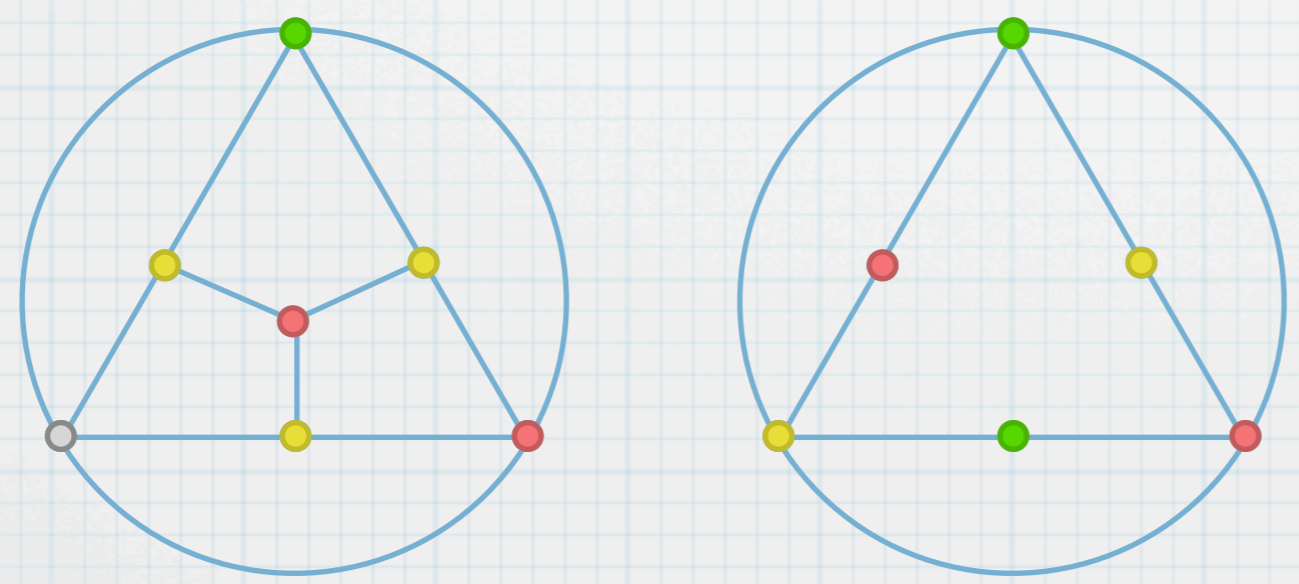


Kritische Graphen

- * **Definition 9:**
Ein Graph G heißt k -kritisch (genau: k -knotenkritisch), wenn $\chi(G) = k$ und $\chi(G - v) < k$ für alle Knoten v von G .
- * Beispiele:
 - * K_1 ist der einzige 1-kritische Graph.
 - * Ein 2-kritischer Graph G ist bipartit (Übung), und für jeden Knoten v ist $G - v$ 1-färbbar. Also ist K_2 der einzige 2-kritische Graph.
 - * Ein Zyklus ungerader Länge ist 3-kritisch.



- * Der folgende Graph ist 4-kritisch:



Der Satz von Dirac, Teil 1

- * **Satz 10** (Dirac, 1952):
Sei G ein k -kritischer Graph. Dann gilt:
 - (a) G ist zusammenhängend,
 - (b) $\deg(v) \geq k - 1$ für alle Knoten v von G .
- * **Beweis:**
 - (a) Angenommen, G ist nicht zusammenhängend.
Nach Satz 3(f) gibt es eine Zusammenhangskomponente C von G mit $\chi(C) = k$.
Sei nun v ein Knoten von G , der nicht Knoten in C ist.
Dann ist C auch Komponente des Untergraphen $G - v$.
Wiederum nach Satz 3(f) ist dann $\chi(G - v) = \chi(C) = k$.
Widerspruch, da G k -kritisch.
Also ist G zusammenhängend.
 - (b) Angenommen, es gibt einen Knoten v von G mit $\deg(v) < k - 1$.
Da G k -kritisch ist, hat der Untergraph $G - v$ eine Färbung mit $k - 1$ Farben.
Knoten v hat höchstens $k - 2$ Nachbarn in $G - v$.
Für diese Nachbarn werden daher nicht alle $k - 1$ Farben verbraucht.
Färbe nun v mit einer Farbe, die unter den Nachbarn nicht vorkommt.
Damit erhalten wir eine Färbung von ganz G , die mit $k - 1$ Farben auskommt.
Widerspruch, da $\chi(G) = k$.
Also ist $\deg(v) \geq k - 1$ für alle Knoten v von G .

Der Satz von Dirac, Teil 2

- * **Satz 10** (Dirac, 1952):
Sei G ein k -kritischer Graph. Dann gilt ferner:
 - (c) es gibt keine Knotenteilmengen V_1, V_2 mit $\emptyset \neq V_1, V_2 \neq V, V = V_1 \cup V_2$ und der von $V_1 \cap V_2$ induzierte Untergraph ist vollständig,
 - (d) $G - v$ ist für alle Knoten v von G zusammenhängend (falls $k > 1$).
- * Beweis:
 - (c) Angenommen, es gibt zwei Knotenteilmengen V_1, V_2 wie angegeben.
Seien $G_1, G_2, G_{1 \cap 2}$ die von $V_1, V_2, V_1 \cap V_2$ induzierten Untergraphen von G .
Da G k -kritisch ist, ist die chromatische Zahl von G_1 und G_2 höchstens $k - 1$.
Wähle eine Färbung von G_1 und eine von G_2 mit jeweils (höchstens) $k - 1$ Farben.
In $G_{1 \cap 2}$ hat jeder Knoten eine andere Farbe, da dieser Graph vollständig ist.
Wir können daher die Farben in G_2 so umordnen, dass die Knoten in $G_{1 \cap 2}$ die gleichen Farben haben wie in G_1 .
Damit haben die Knoten in $V_1 \cup V_2 = V(G)$ zusammen nur $k - 1$ Farben.
Also ist G mit $k - 1$ Farben färbbar, im Widerspruch dazu, dass G k -kritisch ist.
 - (d) Angenommen, es gibt einen Knoten v in G , so dass $G - v$ nicht zusammenhängend ist.
Dann zerfällt $G - v$ in die disjunkten Untergraphen H_1 und H_2 .
Setze $V_1 := V(H_1) \cup \{v\}$ und $V_2 := V(H_2) \cup \{v\}$.
Dann ist $\emptyset \neq V_1, V_2 \neq V, V = V_1 \cup V_2$ und $V_1 \cap V_2 = \{v\} = V(K_1)$ ist ein vollständiger Untergraph von G .
Dieses ist ein Widerspruch zu (c).
Also muss $G - v$ für alle Knoten v zusammenhängend sein.

Folgerungen aus dem Satz von Dirac

* **Satz 11:**

Sei G ein Graph mit $\chi(G) = k$. Dann enthält G mindestens k Knoten v mit $\deg(v) \geq k - 1$.

* Beweis:

Sei H ein k -kritischer Untergraph von G .

Nach dem Satz von Dirac ist $\deg_H(v) \geq k - 1$ für alle Knoten v von H .

Somit ist auch $\deg_G(v) \geq k - 1$.

Da H k -chromatisch ist, enthält H mindestens k Knoten.

* **Satz 12 (Welsh, Powell, 1967):**

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $V = \{x_1, \dots, x_n\}$ und $\deg(x_1) \geq \dots \geq \deg(x_n)$. Dann gilt $\chi(G) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{\min\{i, \deg(x_i) + 1\}\}$.

* Beweis:

1. Fall, G hat keine Kanten.

Dann ist $\chi(G) = 1$ und $\deg(x_i) = 0$ für alle Knoten x_i .

Also ist $\max_{1 \leq i \leq n} \{\min\{i, \deg(x_i) + 1\}\} = \max_{1 \leq i \leq n} \{\min\{i, 1\}\} = 1$.

2. Fall, G hat Kanten.

Sei $\chi(G) = k$.

Nach Satz 11 enthält G mindestens k Knoten v mit $\deg_G(v) \geq k - 1$.

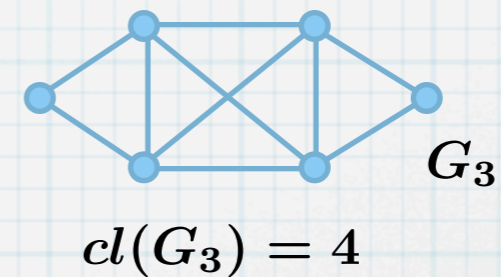
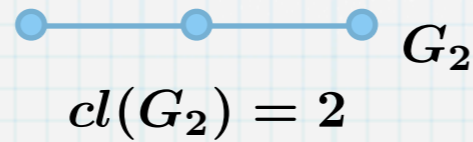
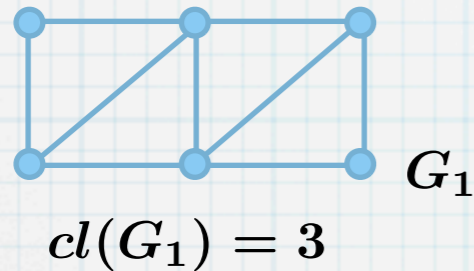
Da wir die Knoten nach Graden sortiert haben, ist $\deg_G(x_i) \geq k - 1$ für $i = 1, \dots, k$.

Dann ist $\min\{k, \deg(x_k) + 1\} = k$.

Also ist $\max_{1 \leq i \leq n} \{\min\{i, \deg(x_i) + 1\}\} \geq k = \chi(G)$.

Cliquen

- * **Definition 13:**
Sei G ein Graph. Ein vollständiger Untergraph von G wird als **Clique** von G bezeichnet. Die Anzahl der Knoten in einer größten Clique von G heißt **Cliquenzahl** von G und wird mit $cl(G)$ oder auch $\omega(G)$ bezeichnet.
- * Beispiele:



Der Satz von Mycielski

- * **Satz 14** (Mycielski, 1955):
Für alle $k \geq 1$ gibt es einen k -chromatischen Graphen M_k , der keinen Dreieck K_3 als Untergraphen enthält.
- * Beweis (durch Induktion über k):

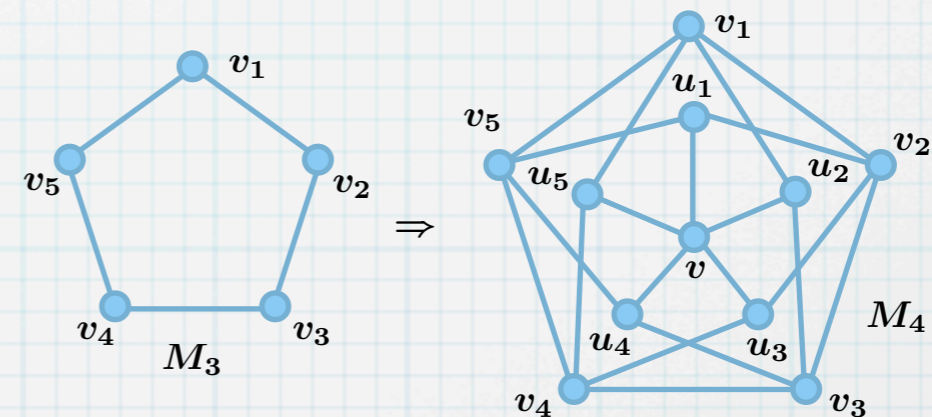
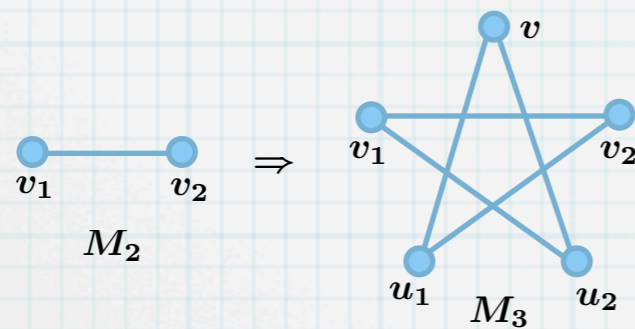
Induktionsanfang: Die Aussage stimmt für die Graphen K_1 und K_2 .

Sei die Aussage wahr für $k \geq 2$, d.h. M_k ist ein k -chromatischer Graph ohne Dreieck.

Sei $V(M_k) = \{v_1, \dots, v_n\}$ die Knotenmenge von M_k .

Definiere M_{k+1} durch $V(M_{k+1}) := V(M_k) \cup \{u_1, \dots, u_n, v\}$ und

$E(M_{k+1}) := E(M_k) \cup \{\{v, u_i\} : i = 1, \dots, n\} \cup \{\{u_i, w\} : i = 1, \dots, n, \{v_i, w\} \in E(M_k)\}$.



Angenommen, M_{k+1} enthält einen Dreieck.

Da M_k nach Induktionsvoraussetzung keinen Dreieck enthält, muss dieser mind. einen Knoten aus $\{u_1, \dots, u_n, v\}$ enthalten.

Keine zwei Knoten u_i, u_j sind adjazent.

Also hat der Dreieck die Form v_j, v_l, u_i, v_j .

Nach Definition von $E(M_{k+1})$ gibt es dann Kanten $\{v_l, v_i\}$ und $\{v_i, v_j\}$ in $E(M_k)$.

Dann ist v_j, v_l, v_i, v_j ein Dreieck in M_k , was ein Widerspruch ist.

Satz von Mycielski (Forts.)

* Beweis (Forts.):

Gegeben sei eine k -Färbung von M_k mit den Farben $1, \dots, k$.

Färbe jeden Knoten u_i mit der Farbe von v_i und v mit einer neuen Farbe $k + 1$.

Dieses ergibt eine zulässige Färbung. Also ist $\chi(M_{k+1}) \leq k + 1$.

Angenommen, es gibt eine k -Färbung von M_{k+1} mit den Farben $1, \dots, k$.

Angenommen sei weiter (o.B.d.A.), dass v mit k gefärbt ist.

Da u_i und v adjazent, kann kein Knoten u_i mit k gefärbt sein.

Also wurden dann zur Färbung von u_1, \dots, u_n nur $k - 1$ Farben genutzt.

Da $\chi(M_k) = k$, wurde Farbe k auch für einige Knoten aus v_1, \dots, v_n verwendet.

Es haben v_i und u_i die gleichen Nachbarn in M_k .

Also können diejenigen Knoten v_1, \dots, v_n in M_k , die mit k gefärbt sind, die Farbe vom jeweiligen Knoten u_1, \dots, u_n erhalten, unter denen Farbe k nicht vorkommt.

Dadurch entsteht eine zulässige Färbung von M_k mit $k - 1$ Farben.

Widerspruch, da $\chi(M_k) = k$.

Also ist $\chi(M_{k+1}) = k + 1$.

Literaturquellen

- * J. Clark, D.A. Holton: **Graphentheorie**, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1994. (Kapitel 6, Seite 209–250)
- * D. Jungnickel: **Graphen, Netzwerke und Algorithmen**, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1994. (Kapitel 8, Seite 299–314)
- * B. Korte, J. Vygen: **Combinatorial Optimization – Theory and Algorithms**, 2nd Edition, Springer Verlag, Berlin, 2001. (Kapitel 16.2, Seite 367–373)
- * S. Krumke, H. Noltemeier: **Graphentheoretische Konzepte und Algorithmen**, Teubner Verlag, Wiesbaden, 2005. (Kapitel 4, Seite 55–78)
- * J.A. Bondy, U.S.R. Murty: **Graph Theory**, Springer Verlag, 2007. (Kapitel 14, Seite 357–390)