# Graphen und Algorithmen

## Vorlesung #8: Färbungsprobleme

Dr. Armin Fügenschuh
Technische Universität Darmstadt
WS 2007/2008

# Übersicht

# Übersicht

* Knotenfärbung (vs. Kanten- & Kartenfärbung)

# Übersicht

* Knotenfärbung (vs. Kanten- & Kartenfärbung)
* Satz von Brooks

# Übersicht

* Knotenfärbung (vs. Kanten- & Kartenfärbung)
* Satz von Brooks
* Algorithmen zur Knotenfärbung

# Übersicht

* Knotenfärbung (vs. Kanten- & Kartenfärbung)
* Satz von Brooks
* Algorithmen zur Knotenfärbung
    * Sequentielle Färbung

# Übersicht

* Knotenfärbung (vs. Kanten- & Kartenfärbung)
* Satz von Brooks
* Algorithmen zur Knotenfärbung
  * Sequentielle Färbung
  * Welsh-Powell-Algorithmus

# Übersicht

* Knotenfärbung (vs. Kanten- & Kartenfärbung)
* Satz von Brooks
* Algorithmen zur Knotenfärbung
    * Sequentielle Färbung
    * Welsh-Powell-Algorithmus
    * Algorithmus von Matula, Marble & Isaacson

# Übersicht

* Knotenfärbung (vs. Kanten- & Kartenfärbung)
* Satz von Brooks
* Algorithmen zur Knotenfärbung
  * Sequentielle Färbung
  * Welsh-Powell-Algorithmus
  * Algorithmus von Matula, Marble & Isaacson
* Kritische Graphen

# Übersicht

- Knotenfärbung (vs. Kanten- & Kartenfärbung)
- Satz von Brooks
- Algorithmen zur Knotenfärbung
  - Sequentielle Färbung
  - Welsh-Powell-Algorithmus
  - Algorithmus von Matula, Marble & Isaacson
- Kritische Graphen
- Satz von Dirac und Folgerungen

# Übersicht

* Knotenfärbung (vs. Kanten- & Kartenfärbung)
* Satz von Brooks
* Algorithmen zur Knotenfärbung
  * Sequentielle Färbung
  * Welsh-Powell-Algorithmus
  * Algorithmus von Matula, Marble & Isaacson
* Kritische Graphen
* Satz von Dirac und Folgerungen
* Cliquen

# Übersicht

* Knotenfärbung (vs. Kanten- & Kartenfärbung)
* Satz von Brooks
* Algorithmen zur Knotenfärbung
  * Sequentielle Färbung
  * Welsh-Powell-Algorithmus
  * Algorithmus von Matula, Marble & Isaacson
* Kritische Graphen
* Satz von Dirac und Folgerungen
* Cliquen
* Satz von Mycielski

# Fluglinienplanung

# Fluglinienplanung

# Fluglinienplanung

* Eine Fluggesellschaft möchte die folgenden sieben Flüge wöchentlich durchführen:

(A) Budapest -> Turin -> Bordeaux -> London
(B) Barcelona -> Genua -> München -> London
(C) Wien -> Bordeaux -> London -> Porto
(D) Wien -> Warschau -> Genau
(E) Wien -> Athen -> Bordeaux
(F) Hamburg -> München -> London
(G) Hamburg -> Zürich -> Genua

# Fluglinienplanung

* Eine Fluggesellschaft möchte die folgenden sieben Flüge wöchentlich durchführen:
  - (A) Budapest -> Turin -> Bordeaux -> London
  - (B) Barcelona -> Genua -> München -> London
  - (C) Wien -> Bordeaux -> London -> Porto
  - (D) Wien -> Warschau -> Genau
  - (E) Wien -> Athen -> Bordeaux
  - (F) Hamburg -> München -> London
  - (G) Hamburg -> Zürich -> Genua
* Alle Flügen starten und enden in Frankfurt.

# Fluglinienplanung

* Eine Fluggesellschaft möchte die folgenden sieben Flüge wöchentlich durchführen:
  - (A) Budapest -> Turin -> Bordeaux -> London
  - (B) Barcelona -> Genua -> München -> London
  - (C) Wien -> Bordeaux -> London -> Porto
  - (D) Wien -> Warschau -> Genau
  - (E) Wien -> Athen -> Bordeaux
  - (F) Hamburg -> München -> London
  - (G) Hamburg -> Zürich -> Genua
* Alle Flügen starten und enden in Frankfurt.
* Jedes Zwischenziel soll nicht öfter als ein Mal am Tag angeflogen werden.

# Fluglinienplanung

* Eine Fluggesellschaft möchte die folgenden sieben Flüge wöchentlich durchführen:
  (A) Budapest -> Turin -> Bordeaux -> London
  (B) Barcelona -> Genua -> München -> London
  (C) Wien -> Bordeaux -> London -> Porto
  (D) Wien -> Warschau -> Genau
  (E) Wien -> Athen -> Bordeaux
  (F) Hamburg -> München -> London
  (G) Hamburg -> Zürich -> Genua
* Alle Flügen starten und enden in Frankfurt.
* Jedes Zwischenziel soll nicht öfter als ein Mal am Tag angeflogen werden.
* Alle Flüge sollen nur montags, mittwochs oder freitags stattfinden.

# Fluglinienplanung

* Eine Fluggesellschaft möchte die folgenden sieben Flüge wöchentlich durchführen:
  (A) Budapest -> Turin -> Bordeaux -> London
  (B) Barcelona -> Genua -> München -> London
  (C) Wien -> Bordeaux -> London -> Porto
  (D) Wien -> Warschau -> Genau
  (E) Wien -> Athen -> Bordeaux
  (F) Hamburg -> München -> London
  (G) Hamburg -> Zürich -> Genua
* Alle Flügen starten und enden in Frankfurt.
* Jedes Zwischenziel soll nicht öfter als ein Mal am Tag angeflogen werden.
* Alle Flüge sollen nur montags, mittwochs oder freitags stattfinden.
* Ist es möglich, unter diesen Randbedingungen einen Flugplan aufzustellen?

# Fluglinienplanung

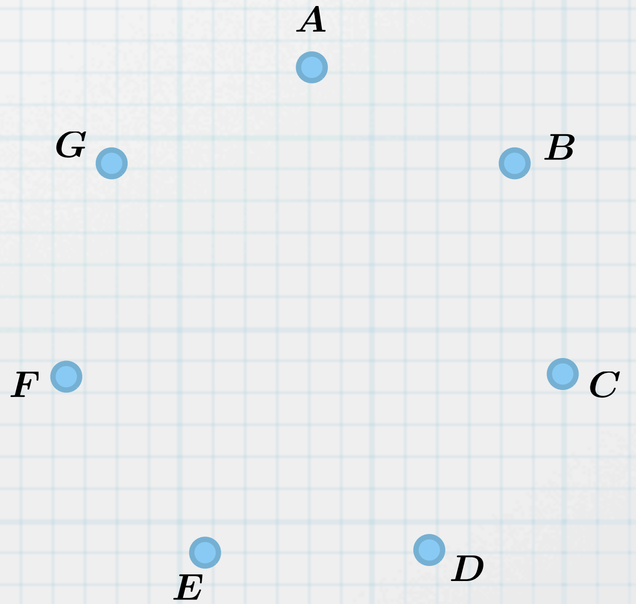
* Eine Fluggesellschaft möchte die folgenden sieben Flüge wöchentlich durchführen:
  (A) Budapest -> Turin -> Bordeaux -> London
  (B) Barcelona -> Genua -> München -> London
  (C) Wien -> Bordeaux -> London -> Porto
  (D) Wien -> Warschau -> Genau
  (E) Wien -> Athen -> Bordeaux
  (F) Hamburg -> München -> London
  (G) Hamburg -> Zürich -> Genua
* Alle Flügen starten und enden in Frankfurt.
* Jedes Zwischenziel soll nicht öfter als ein Mal am Tag angeflogen werden.
* Alle Flüge sollen nur montags, mittwochs oder freitags stattfinden.
* Ist es möglich, unter diesen Randbedingungen einen Flugplan aufzustellen?
* Modellierung:

# Fluglinienplanung

* Eine Fluggesellschaft möchte die folgenden sieben Flüge wöchentlich durchführen:
  (A) Budapest -> Turin -> Bordeaux -> London
  (B) Barcelona -> Genua -> München -> London
  (C) Wien -> Bordeaux -> London -> Porto
  (D) Wien -> Warschau -> Genau
  (E) Wien -> Athen -> Bordeaux
  (F) Hamburg -> München -> London
  (G) Hamburg -> Zürich -> Genua
* Alle Flügen starten und enden in Frankfurt.
* Jedes Zwischenziel soll nicht öfter als ein Mal am Tag angeflogen werden.
* Alle Flüge sollen nur montags, mittwochs oder freitags stattfinden.
* Ist es möglich, unter diesen Randbedingungen einen Flugplan aufzustellen?
* Modellierung:
  Graph mit sieben Knoten (A bis G) für die Flüge.

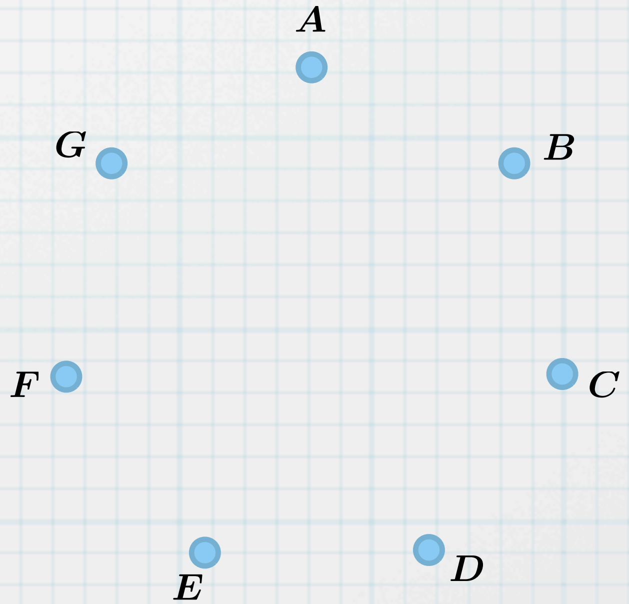
# Fluglinienplanung

* Eine Fluggesellschaft möchte die folgenden sieben Flüge wöchentlich durchführen:
  - (A) Budapest -> Turin -> Bordeaux -> London
  - (B) Barcelona -> Genua -> München -> London
  - (C) Wien -> Bordeaux -> London -> Porto
  - (D) Wien -> Warschau -> Genau
  - (E) Wien -> Athen -> Bordeaux
  - (F) Hamburg -> München -> London
  - (G) Hamburg -> Zürich -> Genua
* Alle Flügen starten und enden in Frankfurt.
* Jedes Zwischenziel soll nicht öfter als ein Mal am Tag angeflogen werden.
* Alle Flüge sollen nur montags, mittwochs oder freitags stattfinden.
* Ist es möglich, unter diesen Randbedingungen einen Flugplan aufzustellen?
* Modellierung:
  - Graph mit sieben Knoten (A bis G) für die Flüge.



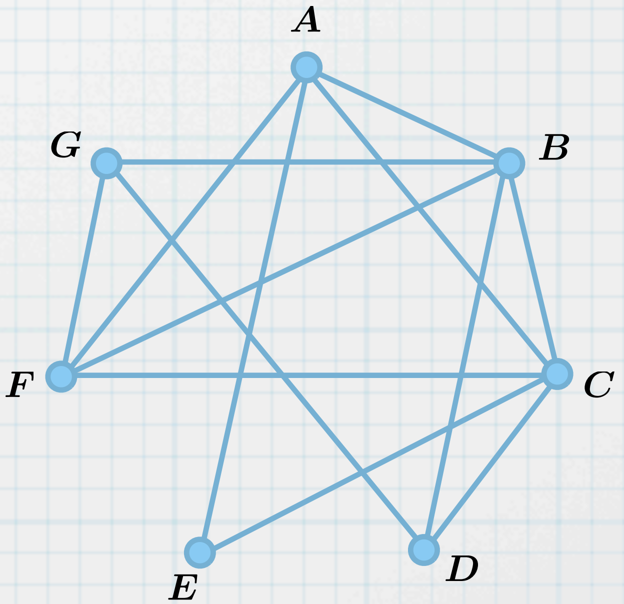
# Fluglinienplanung

* Eine Fluggesellschaft möchte die folgenden sieben Flüge wöchentlich durchführen:
  (A) Budapest -> Turin -> Bordeaux -> London
  (B) Barcelona -> Genua -> München -> London
  (C) Wien -> Bordeaux -> London -> Porto
  (D) Wien -> Warschau -> Genau
  (E) Wien -> Athen -> Bordeaux
  (F) Hamburg -> München -> London
  (G) Hamburg -> Zürich -> Genua
* Alle Flügen starten und enden in Frankfurt.
* Jedes Zwischenziel soll nicht öfter als ein Mal am Tag angeflogen werden.
* Alle Flüge sollen nur montags, mittwochs oder freitags stattfinden.
* Ist es möglich, unter diesen Randbedingungen einen Flugplan aufzustellen?
* Modellierung:
  Graph mit sieben Knoten (A bis G) für die Flüge.
  Kante zwischen zwei Knoten,
  wenn die selbe Stadt als Zwischenziel angeflogen wird.



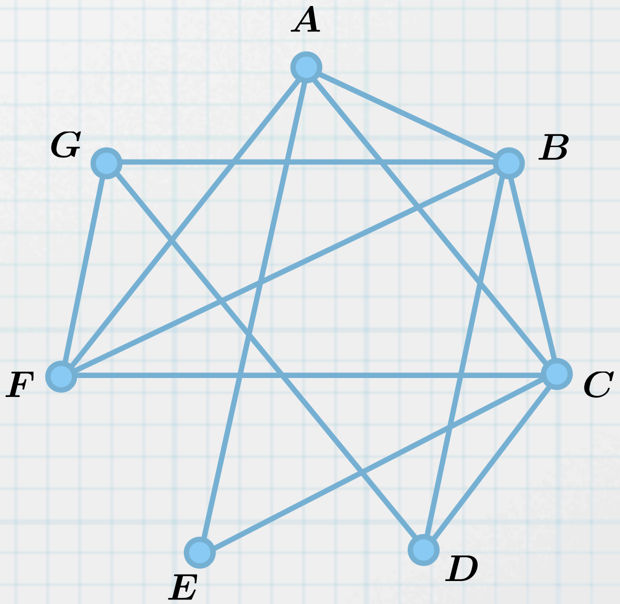
# Fluglinienplanung

* Eine Fluggesellschaft möchte die folgenden sieben Flüge wöchentlich durchführen:
  (A) Budapest -> Turin -> Bordeaux -> London
  (B) Barcelona -> Genua -> München -> London
  (C) Wien -> Bordeaux -> London -> Porto
  (D) Wien -> Warschau -> Genau
  (E) Wien -> Athen -> Bordeaux
  (F) Hamburg -> München -> London
  (G) Hamburg -> Zürich -> Genua
* Alle Flügen starten und enden in Frankfurt.
* Jedes Zwischenziel soll nicht öfter als ein Mal am Tag angeflogen werden.
* Alle Flüge sollen nur montags, mittwochs oder freitags stattfinden.
* Ist es möglich, unter diesen Randbedingungen einen Flugplan aufzustellen?
* Modellierung:
  Graph mit sieben Knoten (A bis G) für die Flüge.
  Kante zwischen zwei Knoten,
  wenn die selbe Stadt als Zwischenziel angeflogen wird.



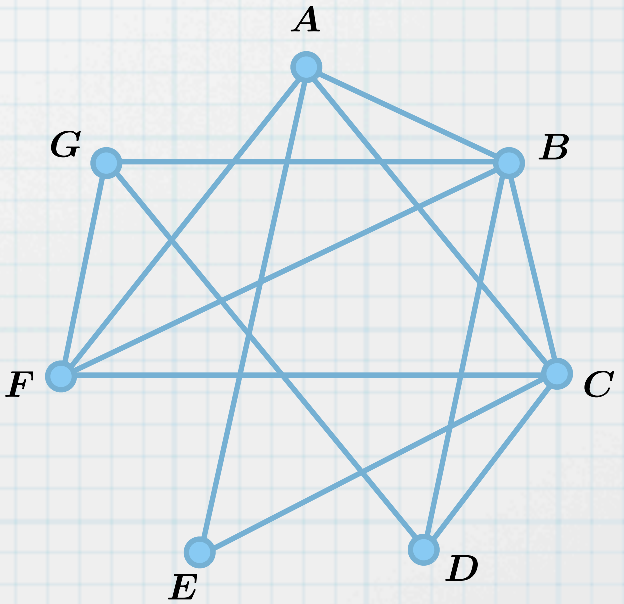
# Fluglinienplanung

* Eine Fluggesellschaft möchte die folgenden sieben Flüge wöchentlich durchführen:
  - (A) Budapest -> Turin -> Bordeaux -> London
  - (B) Barcelona -> Genua -> München -> London
  - (C) Wien -> Bordeaux -> London -> Porto
  - (D) Wien -> Warschau -> Genau
  - (E) Wien -> Athen -> Bordeaux
  - (F) Hamburg -> München -> London
  - (G) Hamburg -> Zürich -> Genua
* Alle Flügen starten und enden in Frankfurt.
* Jedes Zwischenziel soll nicht öfter als ein Mal am Tag angeflogen werden.
* Alle Flüge sollen nur montags, mittwochs oder freitags stattfinden.
* Ist es möglich, unter diesen Randbedingungen einen Flugplan aufzustellen?
* Modellierung:
  - Graph mit sieben Knoten (A bis G) für die Flüge.
  - Kante zwischen zwei Knoten, wenn die selbe Stadt als Zwischenziel angeflogen wird.
  - Die Tage Mo., Mi. und Fr. sollen den Knoten so zugeordnet werden, dass adjazente Knoten unterschiedliche Tage bekommen.



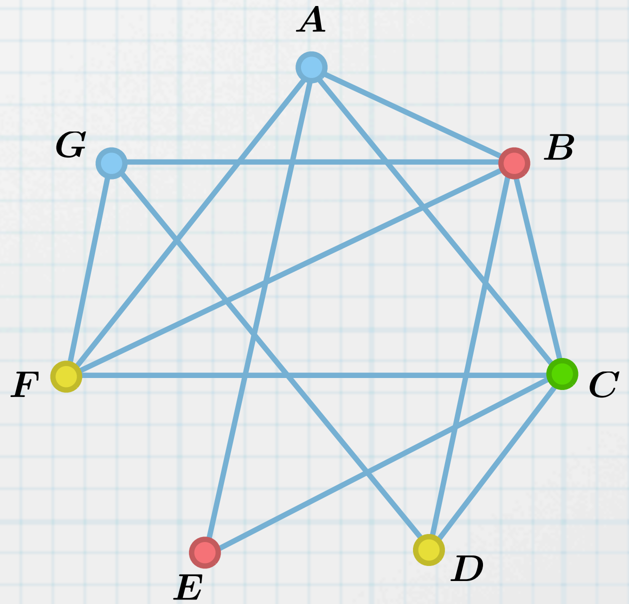
# Fluglinienplanung

* Eine Fluggesellschaft möchte die folgenden sieben Flüge wöchentlich durchführen:
  (A) Budapest -> Turin -> Bordeaux -> London
  (B) Barcelona -> Genua -> München -> London
  (C) Wien -> Bordeaux -> London -> Porto
  (D) Wien -> Warschau -> Genau
  (E) Wien -> Athen -> Bordeaux
  (F) Hamburg -> München -> London
  (G) Hamburg -> Zürich -> Genua
* Alle Flügen starten und enden in Frankfurt.
* Jedes Zwischenziel soll nicht öfter als ein Mal am Tag angeflogen werden.
* Alle Flüge sollen nur montags, mittwochs oder freitags stattfinden.
* Ist es möglich, unter diesen Randbedingungen einen Flugplan aufzustellen?
* Modellierung:
  Graph mit sieben Knoten (A bis G) für die Flüge.
  Kante zwischen zwei Knoten, wenn die selbe Stadt als Zwischenziel angeflogen wird.
  Die Tage Mo., Mi. und Fr. sollen den Knoten so zugeordnet werden, dass adjazente Knoten unterschiedliche Tage bekommen.
* Ersetze die drei Tage durch drei Farben, so entsteht ein Färbungsproblem.



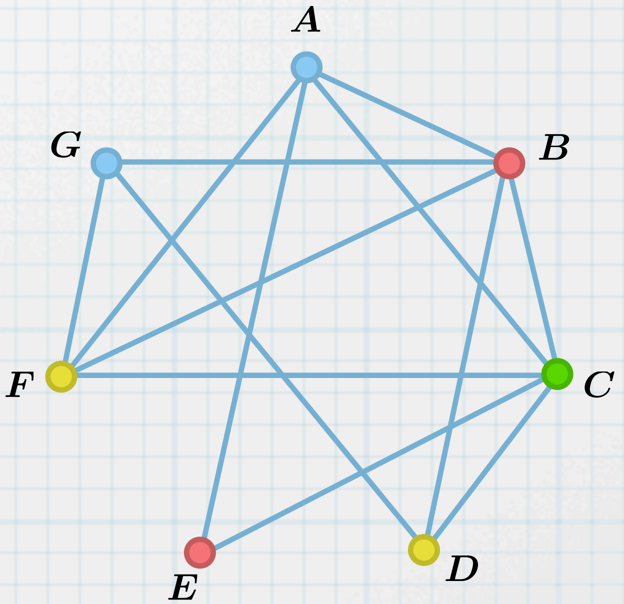
# Fluglinienplanung

* Eine Fluggesellschaft möchte die folgenden sieben Flüge wöchentlich durchführen:
  (A) Budapest -> Turin -> Bordeaux -> London
  (B) Barcelona -> Genua -> München -> London
  (C) Wien -> Bordeaux -> London -> Porto
  (D) Wien -> Warschau -> Genau
  (E) Wien -> Athen -> Bordeaux
  (F) Hamburg -> München -> London
  (G) Hamburg -> Zürich -> Genua
* Alle Flügen starten und enden in Frankfurt.
* Jedes Zwischenziel soll nicht öfter als ein Mal am Tag angeflogen werden.
* Alle Flüge sollen nur montags, mittwochs oder freitags stattfinden.
* Ist es möglich, unter diesen Randbedingungen einen Flugplan aufzustellen?
* Modellierung:
  Graph mit sieben Knoten (A bis G) für die Flüge.
  Kante zwischen zwei Knoten,
  wenn die selbe Stadt als Zwischenziel angeflogen wird.
  Die Tage Mo., Mi. und Fr. sollen den Knoten so zugeordnet werden, dass adjazente Knoten unterschiedliche Tage bekommen.
* Ersetze die drei Tage durch drei Farben,
  so entsteht ein Färbungsproblem.



# Fluglinienplanung

* Eine Fluggesellschaft möchte die folgenden sieben Flüge wöchentlich durchführen:
  (A) Budapest -> Turin -> Bordeaux -> London
  (B) Barcelona -> Genua -> München -> London
  (C) Wien -> Bordeaux -> London -> Porto
  (D) Wien -> Warschau -> Genau
  (E) Wien -> Athen -> Bordeaux
  (F) Hamburg -> München -> London
  (G) Hamburg -> Zürich -> Genua
* Alle Flügen starten und enden in Frankfurt.
* Jedes Zwischenziel soll nicht öfter als ein Mal am Tag angeflogen werden.
* Alle Flüge sollen nur montags, mittwochs oder freitags stattfinden.
* Ist es möglich, unter diesen Randbedingungen einen Flugplan aufzustellen?
* Modellierung:
  Graph mit sieben Knoten (A bis G) für die Flüge.
  Kante zwischen zwei Knoten, wenn die selbe Stadt als Zwischenziel angeflogen wird.
  Die Tage Mo., Mi. und Fr. sollen den Knoten so zugeordnet werden, dass adjazente Knoten unterschiedliche Tage bekommen.




* Ersetze die drei Tage durch drei Farben, so entsteht ein Färbungsproblem.
* Kann der Graph mit drei Farben gefärbt werden?

# Knotenfärbung und chromatische Zahl

# Knotenfärbung und chromatische Zahl

* **Definition 1**:
  Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine **Knotenfärbung** von $G$ ist eine Abbildung $f : V \to \mathbb{Z}$ mit $f(u) \neq f(v)$ für alle $\{u, v\} \in E$.

# Knotenfärbung und chromatische Zahl

* **Definition 1**:
  Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine **Knotenfärbung** von $G$ ist eine Abbildung $f : V \to \mathbb{Z}$ mit $f(u) \neq f(v)$ für alle $\{u, v\} \in E$.

  Eine $k$**–Färbung** von $G$ ist eine Knotenfärbung $f$ mit $|f(V)| = k$. In diesem Fall wird $G$ auch als $k$**–färbbar** bezeichnet.

# Knotenfärbung und chromatische Zahl

* **Definition 1**:
  Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine **Knotenfärbung** von $G$ ist eine Abbildung $f : V \to \mathbb{Z}$ mit $f(u) \neq f(v)$ für alle $\{u, v\} \in E$.

  Eine $k$–**Färbung** von $G$ ist eine Knotenfärbung $f$ mit $|f(V)| = k$. In diesem Fall wird $G$ auch als $k$–**färbbar** bezeichnet.
* **Definition 2**:
  Die kleinste Zahl $n$, für die es eine $n$–Färbung des Graphen $G$ gibt, heißt **chromatische Zahl** von $G$ und wird mit $\chi(G)$ bezeichnet. Ist $\chi(G) = k$, so wird $G$ als $k$–**chromatisch** bezeichnet.

# Knotenfärbung und chromatische Zahl

* **Definition 1**:
  Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine **Knotenfärbung** von $G$ ist eine Abbildung $f : V \to \mathbb{Z}$ mit $f(u) \neq f(v)$ für alle $\{u, v\} \in E$.

  Eine $k$–**Färbung** von $G$ ist eine Knotenfärbung $f$ mit $|f(V)| = k$. In diesem Fall wird $G$ auch als $k$–**färbbar** bezeichnet.
* **Definition 2**:
  Die kleinste Zahl $n$, für die es eine $n$–Färbung des Graphen $G$ gibt, heißt **chromatische Zahl** von $G$ und wird mit $\chi(G)$ bezeichnet. Ist $\chi(G) = k$, so wird $G$ als $k$–**chromatisch** bezeichnet.
* Bemerkung:

# Knotenfärbung und chromatische Zahl

* **Definition 1**:
  Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine **Knotenfärbung** von $G$ ist eine Abbildung $f : V \to \mathbb{Z}$ mit $f(u) \neq f(v)$ für alle $\{u, v\} \in E$.

  Eine $k$–**Färbung** von $G$ ist eine Knotenfärbung $f$ mit $|f(V)| = k$. In diesem Fall wird $G$ auch als $k$–**färbbar** bezeichnet.
* **Definition 2**:
  Die kleinste Zahl $n$, für die es eine $n$–Färbung des Graphen $G$ gibt, heißt **chromatische Zahl** von $G$ und wird mit $\chi(G)$ bezeichnet. Ist $\chi(G) = k$, so wird $G$ als $k$–**chromatisch** bezeichnet.
* Bemerkung:

  Hat ein Graph eine Schlinge an einem Knoten $v$, dann ist $v$ adjazent mit sich selber. Somit ist keine Färbung möglich.

# Knotenfärbung und chromatische Zahl

* **Definition 1**:
  Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine **Knotenfärbung** von $G$ ist eine Abbildung $f : V \to \mathbb{Z}$ mit $f(u) \neq f(v)$ für alle $\{u, v\} \in E$.

  Eine $k$–**Färbung** von $G$ ist eine Knotenfärbung $f$ mit $|f(V)| = k$. In diesem Fall wird $G$ auch als $k$–**färbbar** bezeichnet.
* **Definition 2**:
  Die kleinste Zahl $n$, für die es eine $n$–Färbung des Graphen $G$ gibt, heißt **chromatische Zahl** von $G$ und wird mit $\chi(G)$ bezeichnet. Ist $\chi(G) = k$, so wird $G$ als $k$–**chromatisch** bezeichnet.
* Bemerkung:

  Hat ein Graph eine Schlinge an einem Knoten $v$, dann ist $v$ adjazent mit sich selber. Somit ist keine Färbung möglich.

  Auch Mehrfachkanten können bei Färbungsfragestellungen ignoriert werden.

# Knotenfärbung und chromatische Zahl

* **Definition 1**:
  Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine **Knotenfärbung** von $G$ ist eine Abbildung $f : V \to \mathbb{Z}$ mit $f(u) \neq f(v)$ für alle $\{u, v\} \in E$.

  Eine $k$–**Färbung** von $G$ ist eine Knotenfärbung $f$ mit $|f(V)| = k$. In diesem Fall wird $G$ auch als $k$–**färbbar** bezeichnet.
* **Definition 2**:
  Die kleinste Zahl $n$, für die es eine $n$–Färbung des Graphen $G$ gibt, heißt **chromatische Zahl** von $G$ und wird mit $\chi(G)$ bezeichnet. Ist $\chi(G) = k$, so wird $G$ als $k$–**chromatisch** bezeichnet.
* Bemerkung:

  Hat ein Graph eine Schlinge an einem Knoten $v$, dann ist $v$ adjazent mit sich selber. Somit ist keine Färbung möglich.

  Auch Mehrfachkanten können bei Färbungsfragestellungen ignoriert werden.

  O.B.d.A. betrachten wir nachfolgend nur schlichte Graphen.

# Knotenfärbung und chromatische Zahl

* **Definition 1**:
  Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine **Knotenfärbung** von $G$ ist eine Abbildung $f : V \to \mathbb{Z}$ mit $f(u) \neq f(v)$ für alle $\{u, v\} \in E$.

  Eine $k$–**Färbung** von $G$ ist eine Knotenfärbung $f$ mit $|f(V)| = k$. In diesem Fall wird $G$ auch als $k$–**färbbar** bezeichnet.
* **Definition 2**:
  Die kleinste Zahl $n$, für die es eine $n$–Färbung des Graphen $G$ gibt, heißt **chromatische Zahl** von $G$ und wird mit $\chi(G)$ bezeichnet. Ist $\chi(G) = k$, so wird $G$ als $k$–**chromatisch** bezeichnet.
* Bemerkung:

  Hat ein Graph eine Schlinge an einem Knoten $v$, dann ist $v$ adjazent mit sich selber. Somit ist keine Färbung möglich.

  Auch Mehrfachkanten können bei Färbungsfragestellungen ignoriert werden.

  O.B.d.A. betrachten wir nachfolgend nur schlichte Graphen.
* **Satz 3**:
  Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

# Knotenfärbung und chromatische Zahl

* **Definition 1**:
  Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine **Knotenfärbung** von $G$ ist eine Abbildung $f : V \to \mathbb{Z}$ mit $f(u) \neq f(v)$ für alle $\{u, v\} \in E$.

  Eine $k$–**Färbung** von $G$ ist eine Knotenfärbung $f$ mit $|f(V)| = k$. In diesem Fall wird $G$ auch als $k$–**färbbar** bezeichnet.
* **Definition 2**:
  Die kleinste Zahl $n$, für die es eine $n$–Färbung des Graphen $G$ gibt, heißt **chromatische Zahl** von $G$ und wird mit $\chi(G)$ bezeichnet. Ist $\chi(G) = k$, so wird $G$ als $k$–**chromatisch** bezeichnet.
* Bemerkung:

  Hat ein Graph eine Schlinge an einem Knoten $v$, dann ist $v$ adjazent mit sich selber. Somit ist keine Färbung möglich.

  Auch Mehrfachkanten können bei Färbungsfragestellungen ignoriert werden.

  O.B.d.A. betrachten wir nachfolgend nur schlichte Graphen.
* **Satz 3**:
  Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

  (a) Hat der Graph $n$ Knoten, so ist $\chi(G) \leq n$.

# Knotenfärbung und chromatische Zahl

* **Definition 1**:
  Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine **Knotenfärbung** von $G$ ist eine Abbildung $f : V \to \mathbb{Z}$ mit $f(u) \neq f(v)$ für alle $\{u, v\} \in E$.

  Eine $k$–**Färbung** von $G$ ist eine Knotenfärbung $f$ mit $|f(V)| = k$. In diesem Fall wird $G$ auch als $k$–**färbbar** bezeichnet.
* **Definition 2**:
  Die kleinste Zahl $n$, für die es eine $n$–Färbung des Graphen $G$ gibt, heißt **chromatische Zahl** von $G$ und wird mit $\chi(G)$ bezeichnet. Ist $\chi(G) = k$, so wird $G$ als $k$–**chromatisch** bezeichnet.
* Bemerkung:

  Hat ein Graph eine Schlinge an einem Knoten $v$, dann ist $v$ adjazent mit sich selber. Somit ist keine Färbung möglich.

  Auch Mehrfachkanten können bei Färbungsfragestellungen ignoriert werden.

  O.B.d.A. betrachten wir nachfolgend nur schlichte Graphen.
* **Satz 3**:
  Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

  (a) Hat der Graph $n$ Knoten, so ist $\chi(G) \leq n$.

  (b) Ist $H$ ein Untergraph von $G$, so ist $\chi(H) \leq \chi(G)$.

# Knotenfärbung und chromatische Zahl

* **Definition 1**:
  Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine **Knotenfärbung** von $G$ ist eine Abbildung $f : V \to \mathbb{Z}$ mit $f(u) \neq f(v)$ für alle $\{u, v\} \in E$.

  Eine $k$**–Färbung** von $G$ ist eine Knotenfärbung $f$ mit $|f(V)| = k$. In diesem Fall wird $G$ auch als $k$**–färbbar** bezeichnet.
* **Definition 2**:
  Die kleinste Zahl $n$, für die es eine $n$–Färbung des Graphen $G$ gibt, heißt **chromatische Zahl** von $G$ und wird mit $\chi(G)$ bezeichnet. Ist $\chi(G) = k$, so wird $G$ als $k$**–chromatisch** bezeichnet.
* Bemerkung:

  Hat ein Graph eine Schlinge an einem Knoten $v$, dann ist $v$ adjazent mit sich selber. Somit ist keine Färbung möglich.

  Auch Mehrfachkanten können bei Färbungsfragestellungen ignoriert werden.

  O.B.d.A. betrachten wir nachfolgend nur schlichte Graphen.
* **Satz 3**:
  Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

  (a) Hat der Graph $n$ Knoten, so ist $\chi(G) \leq n$.

  (b) Ist $H$ ein Untergraph von $G$, so ist $\chi(H) \leq \chi(G)$.

  (c) Ist $v$ ein Knoten von $G$, so ist $\chi(G) \leq \chi(G - v) + 1$.

# Knotenfärbung und chromatische Zahl

* **Definition 1**:
  Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine **Knotenfärbung** von $G$ ist eine Abbildung $f : V \to \mathbb{Z}$ mit $f(u) \neq f(v)$ für alle $\{u, v\} \in E$.

  Eine $k$–**Färbung** von $G$ ist eine Knotenfärbung $f$ mit $|f(V)| = k$. In diesem Fall wird $G$ auch als $k$–**färbbar** bezeichnet.
* **Definition 2**:
  Die kleinste Zahl $n$, für die es eine $n$–Färbung des Graphen $G$ gibt, heißt **chromatische Zahl** von $G$ und wird mit $\chi(G)$ bezeichnet. Ist $\chi(G) = k$, so wird $G$ als $k$–**chromatisch** bezeichnet.
* Bemerkung:

  Hat ein Graph eine Schlinge an einem Knoten $v$, dann ist $v$ adjazent mit sich selber. Somit ist keine Färbung möglich.

  Auch Mehrfachkanten können bei Färbungsfragestellungen ignoriert werden.

  O.B.d.A. betrachten wir nachfolgend nur schlichte Graphen.
* **Satz 3**:
  Sei $G = (V, E)$ ein Graph.
  (a) Hat der Graph $n$ Knoten, so ist $\chi(G) \leq n$.
  (b) Ist $H$ ein Untergraph von $G$, so ist $\chi(H) \leq \chi(G)$.
  (c) Ist $v$ ein Knoten von $G$, so ist $\chi(G) \leq \chi(G - v) + 1$.
  (d) $\chi(K_n) = n$ für alle $n \geq 1$.

# Knotenfärbung und chromatische Zahl

- **Definition 1**:
  Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine **Knotenfärbung** von $G$ ist eine Abbildung $f : V \to \mathbb{Z}$ mit $f(u) \neq f(v)$ für alle $\{u, v\} \in E$.

  Eine $k$**–Färbung** von $G$ ist eine Knotenfärbung $f$ mit $|f(V)| = k$. In diesem Fall wird $G$ auch als $k$**–färbbar** bezeichnet.
- **Definition 2**:
  Die kleinste Zahl $n$, für die es eine $n$–Färbung des Graphen $G$ gibt, heißt **chromatische Zahl** von $G$ und wird mit $\chi(G)$ bezeichnet. Ist $\chi(G) = k$, so wird $G$ als $k$**–chromatisch** bezeichnet.
- Bemerkung:

  Hat ein Graph eine Schlinge an einem Knoten $v$, dann ist $v$ adjazent mit sich selber. Somit ist keine Färbung möglich.

  Auch Mehrfachkanten können bei Färbungsfragestellungen ignoriert werden.

  O.B.d.A. betrachten wir nachfolgend nur schlichte Graphen.
- **Satz 3**:
  Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

  (a) Hat der Graph $n$ Knoten, so ist $\chi(G) \leq n$.

  (b) Ist $H$ ein Untergraph von $G$, so ist $\chi(H) \leq \chi(G)$.

  (c) Ist $v$ ein Knoten von $G$, so ist $\chi(G) \leq \chi(G - v) + 1$.

  (d) $\chi(K_n) = n$ für alle $n \geq 1$.

  (e) Ist $K_n$ ein Untergraph von $G$, so ist $\chi(G) \geq n$.

# Knotenfärbung und chromatische Zahl

* **Definition 1**:
  Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine **Knotenfärbung** von $G$ ist eine Abbildung $f : V \to \mathbb{Z}$ mit $f(u) \neq f(v)$ für alle $\{u, v\} \in E$.

  Eine $k$**–Färbung** von $G$ ist eine Knotenfärbung $f$ mit $|f(V)| = k$. In diesem Fall wird $G$ auch als $k$**–färbbar** bezeichnet.
* **Definition 2**:
  Die kleinste Zahl $n$, für die es eine $n$–Färbung des Graphen $G$ gibt, heißt **chromatische Zahl** von $G$ und wird mit $\chi(G)$ bezeichnet. Ist $\chi(G) = k$, so wird $G$ als $k$**–chromatisch** bezeichnet.
* Bemerkung:

  Hat ein Graph eine Schlinge an einem Knoten $v$, dann ist $v$ adjazent mit sich selber. Somit ist keine Färbung möglich.

  Auch Mehrfachkanten können bei Färbungsfragestellungen ignoriert werden.

  O.B.d.A. betrachten wir nachfolgend nur schlichte Graphen.
* **Satz 3**:
  Sei $G = (V, E)$ ein Graph.
  (a) Hat der Graph $n$ Knoten, so ist $\chi(G) \leq n$.
  (b) Ist $H$ ein Untergraph von $G$, so ist $\chi(H) \leq \chi(G)$.
  (c) Ist $v$ ein Knoten von $G$, so ist $\chi(G) \leq \chi(G - v) + 1$.
  (d) $\chi(K_n) = n$ für alle $n \geq 1$.
  (e) Ist $K_n$ ein Untergraph von $G$, so ist $\chi(G) \geq n$.
  (f) Sind $G_1, \ldots, G_n$ die Zusammenhangskomponenten von $G$, so ist $\chi(G) = \max\{\chi(G_i) : 1 \leq i \leq n\}$.

# Knotenfärbung und chromatische Zahl

* **Definition 1**:
  Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine **Knotenfärbung** von $G$ ist eine Abbildung $f : V \to \mathbb{Z}$ mit $f(u) \neq f(v)$ für alle $\{u, v\} \in E$.

  Eine $k$–**Färbung** von $G$ ist eine Knotenfärbung $f$ mit $|f(V)| = k$. In diesem Fall wird $G$ auch als $k$–**färbbar** bezeichnet.
* **Definition 2**:
  Die kleinste Zahl $n$, für die es eine $n$–Färbung des Graphen $G$ gibt, heißt **chromatische Zahl** von $G$ und wird mit $\chi(G)$ bezeichnet. Ist $\chi(G) = k$, so wird $G$ als $k$–**chromatisch** bezeichnet.
* Bemerkung:

  Hat ein Graph eine Schlinge an einem Knoten $v$, dann ist $v$ adjazent mit sich selber. Somit ist keine Färbung möglich.

  Auch Mehrfachkanten können bei Färbungsfragestellungen ignoriert werden.

  O.B.d.A. betrachten wir nachfolgend nur schlichte Graphen.
* **Satz 3**:
  Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

  (a) Hat der Graph $n$ Knoten, so ist $\chi(G) \leq n$.

  (b) Ist $H$ ein Untergraph von $G$, so ist $\chi(H) \leq \chi(G)$.

  (c) Ist $v$ ein Knoten von $G$, so ist $\chi(G) \leq \chi(G - v) + 1$.

  (d) $\chi(K_n) = n$ für alle $n \geq 1$.

  (e) Ist $K_n$ ein Untergraph von $G$, so ist $\chi(G) \geq n$.

  (f) Sind $G_1, \ldots, G_n$ die Zusammenhangskomponenten von $G$, so ist $\chi(G) = \max\{\chi(G_i) : 1 \leq i \leq n\}$.
* Beispiel: Da der $K_4$ ein Untergraph des Flugliniengraph ist, gibt es also keine 3–Färbung.

# Chromatische Zahl und maximaler Knotengrad

# Chromatische Zahl und maximaler Knotengrad

* **Definition 4**:
  Sei $G$ ein Graph. Mit $\mathbf{\Delta(G) := \max\{\deg(v) : v \in V(G)\}}$ bezeichnen wir den **maximalen Knotengrad**.

# Chromatische Zahl und maximaler Knotengrad

* **Definition 4**:
  Sei $G$ ein Graph. Mit $\mathbf{\Delta}(G) := \max\{\deg(v) : v \in V(G)\}$ bezeichnen wir den **maximalen Knotengrad**.
* **Satz 5**:
  Sei $G$ ein Graph. Dann gilt $\chi(G) \leq \mathbf{\Delta}(G) + 1$.

# Chromatische Zahl und maximaler Knotengrad

* **Definition 4**:
  Sei $G$ ein Graph. Mit $\mathbf{\Delta(G) := \max\{\deg(v) : v \in V(G)\}}$ bezeichnen wir den **maximalen Knotengrad**.
* **Satz 5**:
  Sei $G$ ein Graph. Dann gilt $\chi(G) \leq \mathbf{\Delta}(G) + 1$.
* Beweis (durch Induktion über die Anzahl der Knoten $n$ von $G$):

# Chromatische Zahl und maximaler Knotengrad

* **Definition 4**:
  Sei $G$ ein Graph. Mit $\mathbf{\Delta(G) := \max\{\deg(v) : v \in V(G)\}}$ bezeichnen wir den **maximalen Knotengrad**.
* **Satz 5**:
  Sei $G$ ein Graph. Dann gilt $\chi(G) \leq \mathbf{\Delta}(G) + 1$.
* Beweis (durch Induktion über die Anzahl der Knoten $n$ von $G$):
  Induktionsanfang, $n = 1$. Dann ist $G = K_1, \chi(G) = 1$ und $\mathbf{\Delta}(G) = 0$.

# Chromatische Zahl und maximaler Knotengrad

* **Definition 4**:
  Sei $G$ ein Graph. Mit $\Delta(G) := \max\{\deg(v) : v \in V(G)\}$ bezeichnen wir den **maximalen Knotengrad**.
* **Satz 5**:
  Sei $G$ ein Graph. Dann gilt $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.
* Beweis (durch Induktion über die Anzahl der Knoten $n$ von $G$):
  - Induktionsanfang, $n = 1$. Dann ist $G = K_1, \chi(G) = 1$ und $\Delta(G) = 0$.
  - Sei die Aussage wahr für alle Graphen mit $n-1$ Knoten und $G$ ein Graph mit $n$ Knoten.

# Chromatische Zahl und maximaler Knotengrad

* **Definition 4**:
  Sei $G$ ein Graph. Mit $\mathbf{\Delta(G) := \max\{\deg(v) : v \in V(G)\}}$ bezeichnen wir den **maximalen Knotengrad**.
* **Satz 5**:
  Sei $G$ ein Graph. Dann gilt $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.
* Beweis (durch Induktion über die Anzahl der Knoten $n$ von $G$):
  Induktionsanfang, $n = 1$. Dann ist $G = K_1, \chi(G) = 1$ und $\Delta(G) = 0$.
  Sei die Aussage wahr für alle Graphen mit $n - 1$ Knoten und $G$ ein Graph mit $n$ Knoten.
  Sei $v$ ein Knoten von $G$. Der Untergraph $G - v$ hat dann $n - 1$ Knoten.

# Chromatische Zahl und maximaler Knotengrad

- **Definition 4**:
  Sei $G$ ein Graph. Mit $\mathbf{\Delta(G) := \max\{\deg(v) : v \in V(G)\}}$ bezeichnen wir den **maximalen Knotengrad**.
- **Satz 5**:
  Sei $G$ ein Graph. Dann gilt $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.
- Beweis (durch Induktion über die Anzahl der Knoten $n$ von $G$):
  - Induktionsanfang, $n = 1$. Dann ist $G = K_1, \chi(G) = 1$ und $\Delta(G) = 0$.
  - Sei die Aussage wahr für alle Graphen mit $n - 1$ Knoten und $G$ ein Graph mit $n$ Knoten.
  - Sei $v$ ein Knoten von $G$. Der Untergraph $G - v$ hat dann $n - 1$ Knoten.
  - Somit gilt nach Induktionsvoraussetzung $\chi(G - v) \leq \Delta(G - v) + 1$.

# Chromatische Zahl und maximaler Knotengrad

* **Definition 4**:
  Sei $G$ ein Graph. Mit $\mathbf{\Delta(G) := \max\{deg(v) : v \in V(G)\}}$ bezeichnen wir den **maximalen Knotengrad**.
* **Satz 5**:
  Sei $G$ ein Graph. Dann gilt $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.
* Beweis (durch Induktion über die Anzahl der Knoten $n$ von $G$):
  Induktionsanfang, $n = 1$. Dann ist $G = K_1, \chi(G) = 1$ und $\Delta(G) = 0$.
  Sei die Aussage wahr für alle Graphen mit $n-1$ Knoten und $G$ ein Graph mit $n$ Knoten.
  Sei $v$ ein Knoten von $G$. Der Untergraph $G - v$ hat dann $n-1$ Knoten.
  Somit gilt nach Induktionsvoraussetzung $\chi(G-v) \leq \Delta(G-v) + 1$.
  Wähle eine Knotenfärbung von $G - v$ mit $\Delta(G-v) + 1$ Farben.

# Chromatische Zahl und maximaler Knotengrad

* **Definition 4**:
  Sei $G$ ein Graph. Mit $\boldsymbol{\Delta}(G) := \max\{\deg(v) : v \in V(G)\}$ bezeichnen wir den **maximalen Knotengrad**.
* **Satz 5**:
  Sei $G$ ein Graph. Dann gilt $\chi(G) \leq \boldsymbol{\Delta}(G) + 1$.
* Beweis (durch Induktion über die Anzahl der Knoten $n$ von $G$):
  Induktionsanfang, $n = 1$. Dann ist $G = K_1, \chi(G) = 1$ und $\boldsymbol{\Delta}(G) = 0$.
  Sei die Aussage wahr für alle Graphen mit $n-1$ Knoten und $G$ ein Graph mit $n$ Knoten.
  Sei $v$ ein Knoten von $G$. Der Untergraph $G - v$ hat dann $n-1$ Knoten.
  Somit gilt nach Induktionsvoraussetzung $\chi(G-v) \leq \boldsymbol{\Delta}(G-v) + 1$.
  Wähle eine Knotenfärbung von $G - v$ mit $\boldsymbol{\Delta}(G-v) + 1$ Farben.
  Knoten $v$ hat höchstens $\boldsymbol{\Delta}(G)$ Nachbarn in $G$.

# Chromatische Zahl und maximaler Knotengrad

* **Definition 4**:
  Sei $G$ ein Graph. Mit $\mathbf{\Delta(G) := \max\{\deg(v) : v \in V(G)\}}$ bezeichnen wir den **maximalen Knotengrad**.
* **Satz 5**:
  Sei $G$ ein Graph. Dann gilt $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.
* Beweis (durch Induktion über die Anzahl der Knoten $n$ von $G$):
  Induktionsanfang, $n = 1$. Dann ist $G = K_1, \chi(G) = 1$ und $\Delta(G) = 0$.
  Sei die Aussage wahr für alle Graphen mit $n-1$ Knoten und $G$ ein Graph mit $n$ Knoten.
  Sei $v$ ein Knoten von $G$. Der Untergraph $G - v$ hat dann $n-1$ Knoten.
  Somit gilt nach Induktionsvoraussetzung $\chi(G-v) \leq \Delta(G-v)+1$.
  Wähle eine Knotenfärbung von $G - v$ mit $\Delta(G-v)+1$ Farben.
  Knoten $v$ hat höchstens $\Delta(G)$ Nachbarn in $G$.
  Diese Nachbarn benutzen höchstens $\Delta(G)$ Farben der Färbung von $G - v$.

# Chromatische Zahl und maximaler Knotengrad

* **Definition 4**:
  Sei $G$ ein Graph. Mit $\mathbf{\Delta}(G) := \max\{\deg(v) : v \in V(G)\}$ bezeichnen wir den **maximalen Knotengrad**.
* **Satz 5**:
  Sei $G$ ein Graph. Dann gilt $\chi(G) \leq \mathbf{\Delta}(G) + 1$.
* Beweis (durch Induktion über die Anzahl der Knoten $n$ von $G$):
  Induktionsanfang, $n = 1$. Dann ist $G = K_1, \chi(G) = 1$ und $\mathbf{\Delta}(G) = 0$.
  Sei die Aussage wahr für alle Graphen mit $n - 1$ Knoten und $G$ ein Graph mit $n$ Knoten.
  Sei $v$ ein Knoten von $G$. Der Untergraph $G - v$ hat dann $n - 1$ Knoten.
  Somit gilt nach Induktionsvoraussetzung $\chi(G - v) \leq \mathbf{\Delta}(G - v) + 1$.
  Wähle eine Knotenfärbung von $G - v$ mit $\mathbf{\Delta}(G - v) + 1$ Farben.
  Knoten $v$ hat höchstens $\mathbf{\Delta}(G)$ Nachbarn in $G$.
  Diese Nachbarn benutzen höchstens $\mathbf{\Delta}(G)$ Farben der Färbung von $G - v$.
  1. Fall, $\mathbf{\Delta}(G) = \mathbf{\Delta}(G - v)$.

# Chromatische Zahl und maximaler Knotengrad

* **Definition 4**:
  Sei $G$ ein Graph. Mit $\mathbf{\Delta}(G) := \max\{\deg(v) : v \in V(G)\}$ bezeichnen wir den **maximalen Knotengrad**.
* **Satz 5**:
  Sei $G$ ein Graph. Dann gilt $\chi(G) \leq \mathbf{\Delta}(G) + 1$.
* Beweis (durch Induktion über die Anzahl der Knoten $n$ von $G$):
  Induktionsanfang, $n = 1$. Dann ist $G = K_1, \chi(G) = 1$ und $\mathbf{\Delta}(G) = 0$.
  Sei die Aussage wahr für alle Graphen mit $n - 1$ Knoten und $G$ ein Graph mit $n$ Knoten.
  Sei $v$ ein Knoten von $G$. Der Untergraph $G - v$ hat dann $n - 1$ Knoten.
  Somit gilt nach Induktionsvoraussetzung $\chi(G - v) \leq \mathbf{\Delta}(G - v) + 1$.
  Wähle eine Knotenfärbung von $G - v$ mit $\mathbf{\Delta}(G - v) + 1$ Farben.
  Knoten $v$ hat höchstens $\mathbf{\Delta}(G)$ Nachbarn in $G$.
  Diese Nachbarn benutzen höchstens $\mathbf{\Delta}(G)$ Farben der Färbung von $G - v$.
  1. Fall, $\mathbf{\Delta}(G) = \mathbf{\Delta}(G - v)$.
     Dann gibt es (mind.) eine Farbe, die für die Nachbarn von $v$ nicht verwendet wurde.

# Chromatische Zahl und maximaler Knotengrad

- **Definition 4**:
  Sei $G$ ein Graph. Mit $\Delta(G) := \max\{\deg(v) : v \in V(G)\}$ bezeichnen wir den **maximalen Knotengrad**.
- **Satz 5**:
  Sei $G$ ein Graph. Dann gilt $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.
- Beweis (durch Induktion über die Anzahl der Knoten $n$ von $G$):
  Induktionsanfang, $n = 1$. Dann ist $G = K_1, \chi(G) = 1$ und $\Delta(G) = 0$.
  Sei die Aussage wahr für alle Graphen mit $n-1$ Knoten und $G$ ein Graph mit $n$ Knoten.
  Sei $v$ ein Knoten von $G$. Der Untergraph $G - v$ hat dann $n-1$ Knoten.
  Somit gilt nach Induktionsvoraussetzung $\chi(G-v) \leq \Delta(G-v) + 1$.
  Wähle eine Knotenfärbung von $G - v$ mit $\Delta(G-v)+1$ Farben.
  Knoten $v$ hat höchstens $\Delta(G)$ Nachbarn in $G$.
  Diese Nachbarn benutzen höchstens $\Delta(G)$ Farben der Färbung von $G - v$.
  1. Fall, $\Delta(G) = \Delta(G-v)$.
     Dann gibt es (mind.) eine Farbe, die für die Nachbarn von $v$ nicht verwendet wurde.
     Verwende diese Farbe, so erhalten wir eine Färbung mit $\Delta(G)+1$ Farben für $G$.

# Chromatische Zahl und maximaler Knotengrad

* **Definition 4**:
  Sei $G$ ein Graph. Mit $\Delta(G) := \max\{\deg(v) : v \in V(G)\}$ bezeichnen wir den **maximalen Knotengrad**.
* **Satz 5**:
  Sei $G$ ein Graph. Dann gilt $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.
* Beweis (durch Induktion über die Anzahl der Knoten $n$ von $G$):
  Induktionsanfang, $n = 1$. Dann ist $G = K_1, \chi(G) = 1$ und $\Delta(G) = 0$.
  Sei die Aussage wahr für alle Graphen mit $n - 1$ Knoten und $G$ ein Graph mit $n$ Knoten.
  Sei $v$ ein Knoten von $G$. Der Untergraph $G - v$ hat dann $n - 1$ Knoten.
  Somit gilt nach Induktionsvoraussetzung $\chi(G - v) \leq \Delta(G - v) + 1$.
  Wähle eine Knotenfärbung von $G - v$ mit $\Delta(G - v) + 1$ Farben.
  Knoten $v$ hat höchstens $\Delta(G)$ Nachbarn in $G$.
  Diese Nachbarn benutzen höchstens $\Delta(G)$ Farben der Färbung von $G - v$.
  1. Fall, $\Delta(G) = \Delta(G - v)$.
     Dann gibt es (mind.) eine Farbe, die für die Nachbarn von $v$ nicht verwendet wurde.
     Verwende diese Farbe, so erhalten wir eine Färbung mit $\Delta(G) + 1$ Farben für $G$.
     Also ist $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

# Chromatische Zahl und maximaler Knotengrad

* **Definition 4**:
  Sei $G$ ein Graph. Mit $\Delta(G) := \max\{\deg(v) : v \in V(G)\}$ bezeichnen wir den **maximalen Knotengrad**.
* **Satz 5**:
  Sei $G$ ein Graph. Dann gilt $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.
* Beweis (durch Induktion über die Anzahl der Knoten $n$ von $G$):
  Induktionsanfang, $n = 1$. Dann ist $G = K_1, \chi(G) = 1$ und $\Delta(G) = 0$.
  Sei die Aussage wahr für alle Graphen mit $n - 1$ Knoten und $G$ ein Graph mit $n$ Knoten.
  Sei $v$ ein Knoten von $G$. Der Untergraph $G - v$ hat dann $n - 1$ Knoten.
  Somit gilt nach Induktionsvoraussetzung $\chi(G - v) \leq \Delta(G - v) + 1$.
  Wähle eine Knotenfärbung von $G - v$ mit $\Delta(G - v) + 1$ Farben.
  Knoten $v$ hat höchstens $\Delta(G)$ Nachbarn in $G$.
  Diese Nachbarn benutzen höchstens $\Delta(G)$ Farben der Färbung von $G - v$.
  1. Fall, $\Delta(G) = \Delta(G - v)$.
     Dann gibt es (mind.) eine Farbe, die für die Nachbarn von $v$ nicht verwendet wurde.
     Verwende diese Farbe, so erhalten wir eine Färbung mit $\Delta(G) + 1$ Farben für $G$.
     Also ist $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.
  2. Fall, $\Delta(G) \neq \Delta(G - v)$, d.h. $\Delta(G) > \Delta(G - v)$.

# Chromatische Zahl und maximaler Knotengrad

* **Definition 4**:
  Sei $G$ ein Graph. Mit $\boldsymbol{\Delta}(G) := \max\{\deg(v) : v \in V(G)\}$ bezeichnen wir den **maximalen Knotengrad**.
* **Satz 5**:
  Sei $G$ ein Graph. Dann gilt $\chi(G) \leq \boldsymbol{\Delta}(G) + 1$.
* Beweis (durch Induktion über die Anzahl der Knoten $n$ von $G$):
  Induktionsanfang, $n = 1$. Dann ist $G = K_1, \chi(G) = 1$ und $\boldsymbol{\Delta}(G) = 0$.
  Sei die Aussage wahr für alle Graphen mit $n - 1$ Knoten und $G$ ein Graph mit $n$ Knoten.
  Sei $v$ ein Knoten von $G$. Der Untergraph $G - v$ hat dann $n - 1$ Knoten.
  Somit gilt nach Induktionsvoraussetzung $\chi(G - v) \leq \boldsymbol{\Delta}(G - v) + 1$.
  Wähle eine Knotenfärbung von $G - v$ mit $\boldsymbol{\Delta}(G - v) + 1$ Farben.
  Knoten $v$ hat höchstens $\boldsymbol{\Delta}(G)$ Nachbarn in $G$.
  Diese Nachbarn benutzen höchstens $\boldsymbol{\Delta}(G)$ Farben der Färbung von $G - v$.
  1. Fall, $\boldsymbol{\Delta}(G) = \boldsymbol{\Delta}(G - v)$.
     Dann gibt es (mind.) eine Farbe, die für die Nachbarn von $v$ nicht verwendet wurde.
     Verwende diese Farbe, so erhalten wir eine Färbung mit $\boldsymbol{\Delta}(G) + 1$ Farben für $G$.
     Also ist $\chi(G) \leq \boldsymbol{\Delta}(G) + 1$.
  2. Fall, $\boldsymbol{\Delta}(G) \neq \boldsymbol{\Delta}(G - v)$, d.h. $\boldsymbol{\Delta}(G) > \boldsymbol{\Delta}(G - v)$.
     Färbe $v$ mit einer neuen Farbe.

# Chromatische Zahl und maximaler Knotengrad

* **Definition 4**:
  Sei $G$ ein Graph. Mit $\mathbf{\Delta}(G) := \max\{\deg(v) : v \in V(G)\}$ bezeichnen wir den **maximalen Knotengrad**.
* **Satz 5**:
  Sei $G$ ein Graph. Dann gilt $\chi(G) \leq \mathbf{\Delta}(G) + 1$.
* Beweis (durch Induktion über die Anzahl der Knoten $n$ von $G$):
  Induktionsanfang, $n = 1$. Dann ist $G = K_1, \chi(G) = 1$ und $\mathbf{\Delta}(G) = 0$.
  Sei die Aussage wahr für alle Graphen mit $n - 1$ Knoten und $G$ ein Graph mit $n$ Knoten.
  Sei $v$ ein Knoten von $G$. Der Untergraph $G - v$ hat dann $n - 1$ Knoten.
  Somit gilt nach Induktionsvoraussetzung $\chi(G - v) \leq \mathbf{\Delta}(G - v) + 1$.
  Wähle eine Knotenfärbung von $G - v$ mit $\mathbf{\Delta}(G - v) + 1$ Farben.
  Knoten $v$ hat höchstens $\mathbf{\Delta}(G)$ Nachbarn in $G$.
  Diese Nachbarn benutzen höchstens $\mathbf{\Delta}(G)$ Farben der Färbung von $G - v$.
  1. Fall, $\mathbf{\Delta}(G) = \mathbf{\Delta}(G - v)$.
     Dann gibt es (mind.) eine Farbe, die für die Nachbarn von $v$ nicht verwendet wurde.
     Verwende diese Farbe, so erhalten wir eine Färbung mit $\mathbf{\Delta}(G) + 1$ Farben für $G$.
     Also ist $\chi(G) \leq \mathbf{\Delta}(G) + 1$.
  2. Fall, $\mathbf{\Delta}(G) \neq \mathbf{\Delta}(G - v)$, d.h. $\mathbf{\Delta}(G) > \mathbf{\Delta}(G - v)$.
     Färbe $v$ mit einer neuen Farbe.
     Dann erhalten wir eine $(\mathbf{\Delta}(G - v) + 2)$–Färbung von $G$.

# Chromatische Zahl und maximaler Knotengrad

* **Definition 4**:
  Sei $G$ ein Graph. Mit $\Delta(G) := \max\{\deg(v) : v \in V(G)\}$ bezeichnen wir den **maximalen Knotengrad**.
* **Satz 5**:
  Sei $G$ ein Graph. Dann gilt $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.
* Beweis (durch Induktion über die Anzahl der Knoten $n$ von $G$):
  Induktionsanfang, $n = 1$. Dann ist $G = K_1, \chi(G) = 1$ und $\Delta(G) = 0$.
  Sei die Aussage wahr für alle Graphen mit $n-1$ Knoten und $G$ ein Graph mit $n$ Knoten.
  Sei $v$ ein Knoten von $G$. Der Untergraph $G - v$ hat dann $n-1$ Knoten.
  Somit gilt nach Induktionsvoraussetzung $\chi(G-v) \leq \Delta(G-v) + 1$.
  Wähle eine Knotenfärbung von $G - v$ mit $\Delta(G-v) + 1$ Farben.
  Knoten $v$ hat höchstens $\Delta(G)$ Nachbarn in $G$.
  Diese Nachbarn benutzen höchstens $\Delta(G)$ Farben der Färbung von $G - v$.
  1. Fall, $\Delta(G) = \Delta(G-v)$.
     Dann gibt es (mind.) eine Farbe, die für die Nachbarn von $v$ nicht verwendet wurde.
     Verwende diese Farbe, so erhalten wir eine Färbung mit $\Delta(G) + 1$ Farben für $G$.
     Also ist $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.
  2. Fall, $\Delta(G) \neq \Delta(G-v)$, d.h. $\Delta(G) > \Delta(G-v)$.
     Färbe $v$ mit einer neuen Farbe.
     Dann erhalten wir eine $(\Delta(G-v) + 2)$–Färbung von $G$.
     Aus $\Delta(G-v) < \Delta(G)$ folgt $\Delta(G-v) + 2 \leq \Delta(G) + 1$.

# Chromatische Zahl und maximaler Knotengrad

* **Definition 4**:
  Sei $G$ ein Graph. Mit $\Delta(G) := \max\{\deg(v) : v \in V(G)\}$ bezeichnen wir den **maximalen Knotengrad**.
* **Satz 5**:
  Sei $G$ ein Graph. Dann gilt $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.
* Beweis (durch Induktion über die Anzahl der Knoten $n$ von $G$):
  Induktionsanfang, $n = 1$. Dann ist $G = K_1, \chi(G) = 1$ und $\Delta(G) = 0$.
  Sei die Aussage wahr für alle Graphen mit $n - 1$ Knoten und $G$ ein Graph mit $n$ Knoten.
  Sei $v$ ein Knoten von $G$. Der Untergraph $G - v$ hat dann $n - 1$ Knoten.
  Somit gilt nach Induktionsvoraussetzung $\chi(G - v) \leq \Delta(G - v) + 1$.
  Wähle eine Knotenfärbung von $G - v$ mit $\Delta(G - v) + 1$ Farben.
  Knoten $v$ hat höchstens $\Delta(G)$ Nachbarn in $G$.
  Diese Nachbarn benutzen höchstens $\Delta(G)$ Farben der Färbung von $G - v$.
  1. Fall, $\Delta(G) = \Delta(G - v)$.
     Dann gibt es (mind.) eine Farbe, die für die Nachbarn von $v$ nicht verwendet wurde.
     Verwende diese Farbe, so erhalten wir eine Färbung mit $\Delta(G) + 1$ Farben für $G$.
     Also ist $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.
  2. Fall, $\Delta(G) \neq \Delta(G - v)$, d.h. $\Delta(G) > \Delta(G - v)$.
     Färbe $v$ mit einer neuen Farbe.
     Dann erhalten wir eine $(\Delta(G - v) + 2)$–Färbung von $G$.
     Aus $\Delta(G - v) < \Delta(G)$ folgt $\Delta(G - v) + 2 \leq \Delta(G) + 1$.
     Also ist auch in diesem Fall $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

# Kempe-Ketten

# Kempe-Ketten

* **Definition 6**:
Sei $G$ ein Graph mit einer Färbung, die aus mind. zwei Farben $i, j$ besteht. Sei $H(i, j)$ der Untergraph von $G$, die aus allen Knoten von $G$ besteht, die entweder mit $i$ oder mit $j$ gefärbt sind. Eine **Kempe-Kette** $K$ ist eine Zusammenhangskomponente von $H(i, j)$.

# Kempe-Ketten

* **Definition 6**:
  Sei $G$ ein Graph mit einer Färbung, die aus mind. zwei Farben $i, j$ besteht. Sei $H(i, j)$ der Untergraph von $G$, die aus allen Knoten von $G$ besteht, die entweder mit $i$ oder mit $j$ gefärbt sind. Eine **Kempe-Kette** $K$ ist eine Zusammenhangskomponente von $H(i, j)$.
* Beobachtung: Wenn man in einer Kempe-Kette $K$ die Farben $i$ und $j$ vertauscht, so entsteht wiederum eine zulässige Färbung von $G$.

# Kempe-Ketten

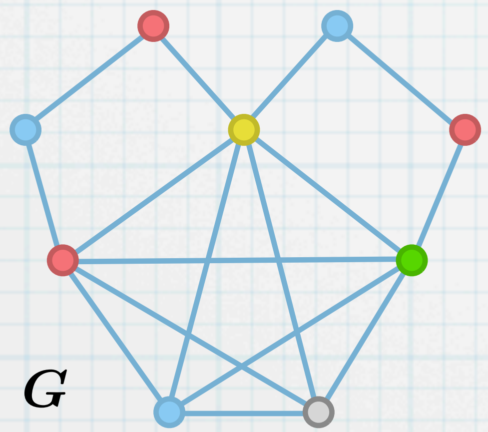
* **Definition 6**:
  Sei $G$ ein Graph mit einer Färbung, die aus mind. zwei Farben $i, j$ besteht. Sei $H(i, j)$ der Untergraph von $G$, die aus allen Knoten von $G$ besteht, die entweder mit $i$ oder mit $j$ gefärbt sind. Eine **Kempe-Kette** $K$ ist eine Zusammenhangskomponente von $H(i, j)$.
* Beobachtung: Wenn man in einer Kempe-Kette $K$ die Farben $i$ und $j$ vertauscht, so entsteht wiederum eine zulässige Färbung von $G$.
* **Definition 7**:
  Das Verfahren der Neufärbung einer Kempe-Kette $K$ wird als **Kempesche Kettenumfärbung** bezeichnet.

# Kempe-Ketten

* **Definition 6**:
  Sei $G$ ein Graph mit einer Färbung, die aus mind. zwei Farben $i, j$ besteht. Sei $H(i, j)$ der Untergraph von $G$, die aus allen Knoten von $G$ besteht, die entweder mit $i$ oder mit $j$ gefärbt sind. Eine **Kempe-Kette** $K$ ist eine Zusammenhangskomponente von $H(i, j)$.
* Beobachtung: Wenn man in einer Kempe-Kette $K$ die Farben $i$ und $j$ vertauscht, so entsteht wiederum eine zulässige Färbung von $G$.
* **Definition 7**:
  Das Verfahren der Neufärbung einer Kempe-Kette $K$ wird als **Kempesche Kettenumfärbung** bezeichnet.
* Beispiel:

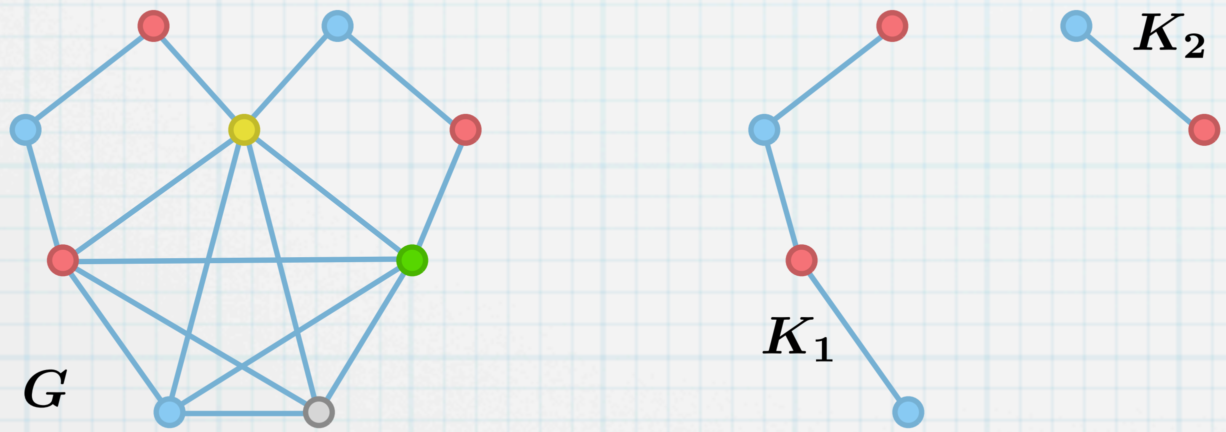
# Kempe-Ketten

* **Definition 6**:
  Sei $G$ ein Graph mit einer Färbung, die aus mind. zwei Farben $i, j$ besteht. Sei $H(i,j)$ der Untergraph von $G$, die aus allen Knoten von $G$ besteht, die entweder mit $i$ oder mit $j$ gefärbt sind. Eine **Kempe–Kette** $K$ ist eine Zusammenhangskomponente von $H(i,j)$.
* Beobachtung: Wenn man in einer Kempe–Kette $K$ die Farben $i$ und $j$ vertauscht, so entsteht wiederum eine zulässige Färbung von $G$.
* **Definition 7**:
  Das Verfahren der Neufärbung einer Kempe–Kette $K$ wird als **Kempesche Kettenumfärbung** bezeichnet.
* Beispiel:



# Kempe-Ketten

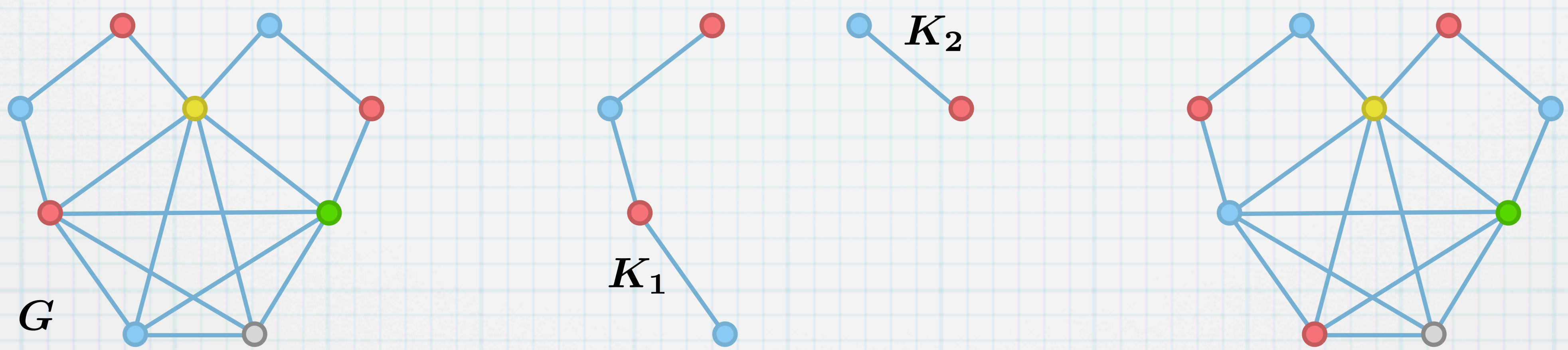
* **Definition 6**:
  Sei $G$ ein Graph mit einer Färbung, die aus mind. zwei Farben $i, j$ besteht. Sei $H(i,j)$ der Untergraph von $G$, die aus allen Knoten von $G$ besteht, die entweder mit $i$ oder mit $j$ gefärbt sind. Eine **Kempe-Kette** $K$ ist eine Zusammenhangskomponente von $H(i,j)$.
* Beobachtung: Wenn man in einer Kempe-Kette $K$ die Farben $i$ und $j$ vertauscht, so entsteht wiederum eine zulässige Färbung von $G$.
* **Definition 7**:
  Das Verfahren der Neufärbung einer Kempe-Kette $K$ wird als **Kempesche Kettenumfärbung** bezeichnet.
* Beispiel:




$H(rot, blau)$

# Kempe-Ketten

- **Definition 6**:
  Sei $G$ ein Graph mit einer Färbung, die aus mind. zwei Farben $i, j$ besteht. Sei $H(i,j)$ der Untergraph von $G$, die aus allen Knoten von $G$ besteht, die entweder mit $i$ oder mit $j$ gefärbt sind. Eine **Kempe-Kette** $K$ ist eine Zusammenhangskomponente von $H(i,j)$.
- Beobachtung: Wenn man in einer Kempe-Kette $K$ die Farben $i$ und $j$ vertauscht, so entsteht wiederum eine zulässige Färbung von $G$.
- **Definition 7**:
  Das Verfahren der Neufärbung einer Kempe-Kette $K$ wird als **Kempesche Kettenumfärbung** bezeichnet.
- Beispiel:




$H(rot, blau)$

# Der Satz von Brooks

# Der Satz von Brooks

* **Satz 8** (Brooks, 1941):
  Sei $G$ zusammenhängend und nicht vollständig mit $\boldsymbol{\Delta}(G) \geq \mathbf{3}$. Dann gilt $\chi(G) \leq \boldsymbol{\Delta}(G)$.

# Der Satz von Brooks

* **Satz 8** (Brooks, 1941):
  Sei $G$ zusammenhängend und nicht vollständig mit $\boldsymbol{\Delta(G) \geq 3}$. Dann gilt $\boldsymbol{\chi(G) \leq \Delta(G)}$.
* Beweis (durch Induktion über die Anzahl der Knoten $n$ von $G$):

# Der Satz von Brooks

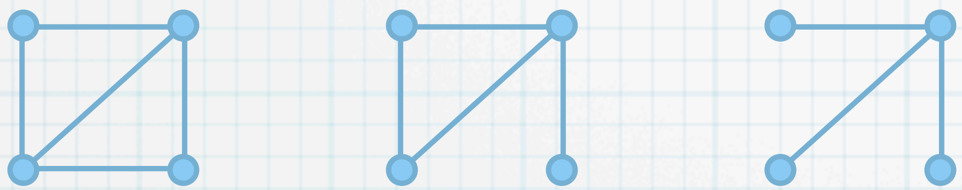
* **Satz 8** (Brooks, 1941):
  Sei $G$ zusammenhängend und nicht vollständig mit $\mathbf{\Delta}(G) \geq \mathbf{3}$. Dann gilt $\chi(G) \leq \mathbf{\Delta}(G)$.
* Beweis (durch Induktion über die Anzahl der Knoten $n$ von $G$):
  Induktionsanfang, $n = 4$ (da $\mathbf{\Delta}(G) \geq \mathbf{3}$).

# Der Satz von Brooks

* **Satz 8** (Brooks, 1941):
  Sei $G$ zusammenhängend und nicht vollständig mit $\mathbf{\Delta(G) \geq 3}$. Dann gilt $\chi(G) \leq \mathbf{\Delta(G)}$.
* Beweis (durch Induktion über die Anzahl der Knoten $n$ von $G$):
  - Induktionsanfang, $n = 4$ (da $\mathbf{\Delta(G) \geq 3}$).
  - Da $G$ nicht vollständig ist (aber schlicht und zusammenhängend), können es nur die folgenden Graphen sein:

# Der Satz von Brooks

- **Satz 8** (Brooks, 1941):
  Sei $G$ zusammenhängend und nicht vollständig mit $\mathbf{\Delta(G) \geq 3}$. Dann gilt $\chi(G) \leq \mathbf{\Delta(G)}$.
- Beweis (durch Induktion über die Anzahl der Knoten $n$ von $G$):
  - Induktionsanfang, $n = 4$ (da $\mathbf{\Delta(G) \geq 3}$).
  - Da $G$ nicht vollständig ist (aber schlicht und zusammenhängend), können es nur die folgenden Graphen sein:

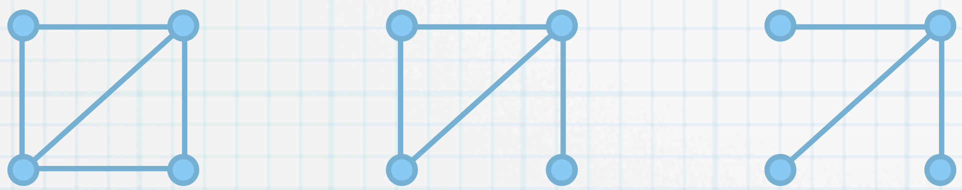


# Der Satz von Brooks

* **Satz 8** (Brooks, 1941):
  Sei $G$ zusammenhängend und nicht vollständig mit $\mathbf{\Delta}(G) \geq \mathbf{3}$. Dann gilt $\chi(G) \leq \mathbf{\Delta}(G)$.
* Beweis (durch Induktion über die Anzahl der Knoten $n$ von $G$):

  Induktionsanfang, $n = 4$ (da $\mathbf{\Delta}(G) \geq \mathbf{3}$).

  Da $G$ nicht vollständig ist (aber schlicht und zusammenhängend), können es nur die folgenden Graphen sein:



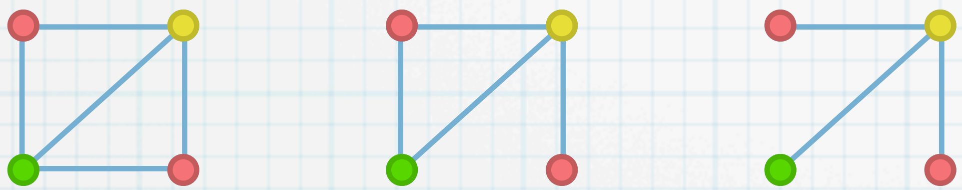
  In jedem der drei Fälle ist die chromatische Zahl $\leq \mathbf{3}$.

# Der Satz von Brooks

* **Satz 8** (Brooks, 1941):
  Sei $G$ zusammenhängend und nicht vollständig mit $\boldsymbol{\Delta(G) \geq 3}$. Dann gilt $\chi(G) \leq \boldsymbol{\Delta}(G)$.
* Beweis (durch Induktion über die Anzahl der Knoten $n$ von $G$):

  Induktionsanfang, $n = 4$ (da $\boldsymbol{\Delta(G) \geq 3}$).

  Da $G$ nicht vollständig ist (aber schlicht und zusammenhängend), können es nur die folgenden Graphen sein:

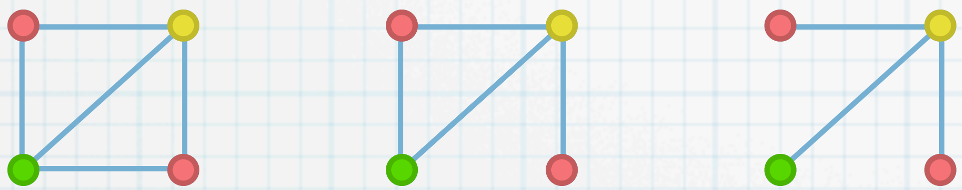
  In jedem der drei Fälle ist die chromatische Zahl $\leq \boldsymbol{3}$.

# Der Satz von Brooks

* **Satz 8** (Brooks, 1941):
  Sei $G$ zusammenhängend und nicht vollständig mit $\mathbf{\Delta}(G) \geq \mathbf{3}$. Dann gilt $\chi(G) \leq \mathbf{\Delta}(G)$.
* Beweis (durch Induktion über die Anzahl der Knoten $n$ von $G$):

  Induktionsanfang, $n = 4$ (da $\mathbf{\Delta}(G) \geq \mathbf{3}$).

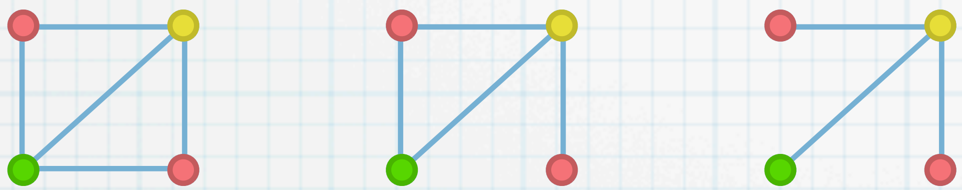
  Da $G$ nicht vollständig ist (aber schlicht und zusammenhängend), können es nur die folgenden Graphen sein:

  In jedem der drei Fälle ist die chromatische Zahl $\leq \mathbf{3}$.

  Sei nun $n \geq \mathbf{5}$ und die Aussage wahr für $n - \mathbf{1}$.

# Der Satz von Brooks

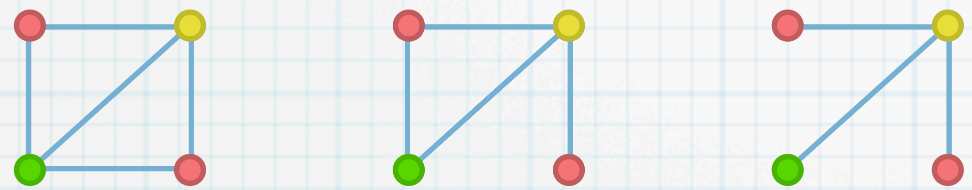
* **Satz 8** (Brooks, 1941):
  Sei $G$ zusammenhängend und nicht vollständig mit $\boldsymbol{\Delta}(G) \geq \mathbf{3}$. Dann gilt $\chi(G) \leq \boldsymbol{\Delta}(G)$.
* Beweis (durch Induktion über die Anzahl der Knoten $n$ von $G$):
  Induktionsanfang, $n = 4$ (da $\boldsymbol{\Delta}(G) \geq \mathbf{3}$).
  Da $G$ nicht vollständig ist (aber schlicht und zusammenhängend), können es nur die folgenden Graphen sein:
  
  In jedem der drei Fälle ist die chromatische Zahl $\leq \mathbf{3}$.
  Sei nun $n \geq \mathbf{5}$ und die Aussage wahr für $n - \mathbf{1}$.
  Wir wissen (siehe Beweis von Satz 5), dass $G$ mit $\boldsymbol{\Delta}(G)$ Farben färbbar ist, wenn es in $G$ einen Knoten $v$ gibt mit $\deg(v) < \boldsymbol{\Delta}(G)$, da dessen Nachbarn zusammen höchstens $\boldsymbol{\Delta}(G) - \mathbf{1}$ Farben haben.

# Der Satz von Brooks

- **Satz 8** (Brooks, 1941):
  Sei $G$ zusammenhängend und nicht vollständig mit $\mathbf{\Delta}(G) \geq \mathbf{3}$. Dann gilt $\chi(G) \leq \mathbf{\Delta}(G)$.
- Beweis (durch Induktion über die Anzahl der Knoten $n$ von $G$):

  Induktionsanfang, $n = 4$ (da $\mathbf{\Delta}(G) \geq \mathbf{3}$).

  Da $G$ nicht vollständig ist (aber schlicht und zusammenhängend), können es nur die folgenden Graphen sein:



  In jedem der drei Fälle ist die chromatische Zahl $\leq \mathbf{3}$.

  Sei nun $n \geq 5$ und die Aussage wahr für $n - 1$.

  Wir wissen (siehe Beweis von Satz 5), dass $G$ mit $\mathbf{\Delta}(G)$ Farben färbbar ist, wenn es in $G$ einen Knoten $v$ gibt mit $\deg(v) < \mathbf{\Delta}(G)$, da dessen Nachbarn zusammen höchstens $\mathbf{\Delta}(G) - 1$ Farben haben.

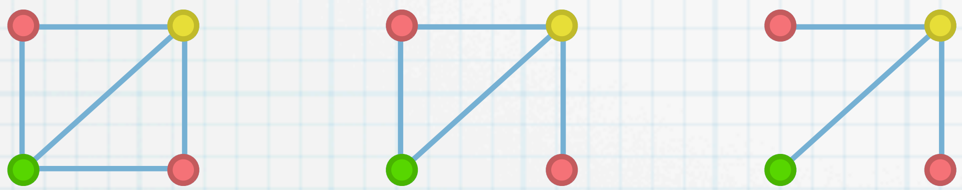
  Also ist der Satz in diesem Fall bewiesen.

# Der Satz von Brooks

* **Satz 8** (Brooks, 1941):
  Sei $G$ zusammenhängend und nicht vollständig mit $\Delta(G) \geq 3$. Dann gilt $\chi(G) \leq \Delta(G)$.
* Beweis (durch Induktion über die Anzahl der Knoten $n$ von $G$):

  Induktionsanfang, $n = 4$ (da $\Delta(G) \geq 3$).

  Da $G$ nicht vollständig ist (aber schlicht und zusammenhängend), können es nur die folgenden Graphen sein:



  In jedem der drei Fälle ist die chromatische Zahl $\leq 3$.

  Sei nun $n \geq 5$ und die Aussage wahr für $n-1$.

  Wir wissen (siehe Beweis von Satz 5), dass $G$ mit $\Delta(G)$ Farben färbbar ist, wenn es in $G$ einen Knoten $v$ gibt mit $\deg(v) < \Delta(G)$, da dessen Nachbarn zusammen höchstens $\Delta(G) - 1$ Farben haben.

  Also ist der Satz in diesem Fall bewiesen.

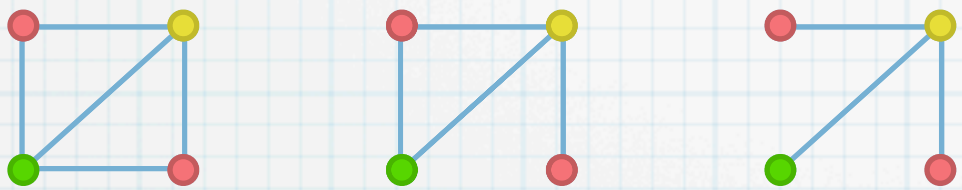
  Es bleibt nur der Fall, dass $G$ ein Graph ist, in dem kein solcher Knoten $v$ existiert.

# Der Satz von Brooks

* **Satz 8** (Brooks, 1941):
  Sei $G$ zusammenhängend und nicht vollständig mit $\Delta(G) \geq 3$. Dann gilt $\chi(G) \leq \Delta(G)$.
* Beweis (durch Induktion über die Anzahl der Knoten $n$ von $G$):

  Induktionsanfang, $n = 4$ (da $\Delta(G) \geq 3$).

  Da $G$ nicht vollständig ist (aber schlicht und zusammenhängend), können es nur die folgenden Graphen sein:

  In jedem der drei Fälle ist die chromatische Zahl $\leq 3$.

  Sei nun $n \geq 5$ und die Aussage wahr für $n - 1$.

  Wir wissen (siehe Beweis von Satz 5), dass $G$ mit $\Delta(G)$ Farben färbbar ist, wenn es in $G$ einen Knoten $v$ gibt mit $\deg(v) < \Delta(G)$, da dessen Nachbarn zusammen höchstens $\Delta(G) - 1$ Farben haben.

  Also ist der Satz in diesem Fall bewiesen.

  Es bleibt nur der Fall, dass $G$ ein Graph ist, in dem kein solcher Knoten $v$ existiert.

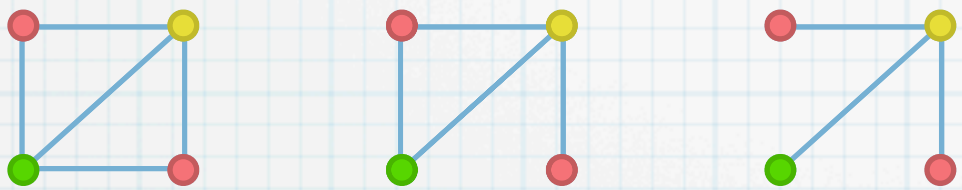
  Dann ist $\deg(v) = \Delta(G) =: d$ für jeden Knoten $v$.

# Der Satz von Brooks

* **Satz 8** (Brooks, 1941):
  Sei $G$ zusammenhängend und nicht vollständig mit $\Delta(G) \geq 3$. Dann gilt $\chi(G) \leq \Delta(G)$.
* Beweis (durch Induktion über die Anzahl der Knoten $n$ von $G$):

  Induktionsanfang, $n = 4$ (da $\Delta(G) \geq 3$).

  Da $G$ nicht vollständig ist (aber schlicht und zusammenhängend), können es nur die folgenden Graphen sein:

  In jedem der drei Fälle ist die chromatische Zahl $\leq 3$.

  Sei nun $n \geq 5$ und die Aussage wahr für $n - 1$.

  Wir wissen (siehe Beweis von Satz 5), dass $G$ mit $\Delta(G)$ Farben färbbar ist, wenn es in $G$ einen Knoten $v$ gibt mit $\deg(v) < \Delta(G)$, da dessen Nachbarn zusammen höchstens $\Delta(G) - 1$ Farben haben.

  Also ist der Satz in diesem Fall bewiesen.

  Es bleibt nur der Fall, dass $G$ ein Graph ist, in dem kein solcher Knoten $v$ existiert.

  Dann ist $\deg(v) = \Delta(G) =: d$ für jeden Knoten $v$.

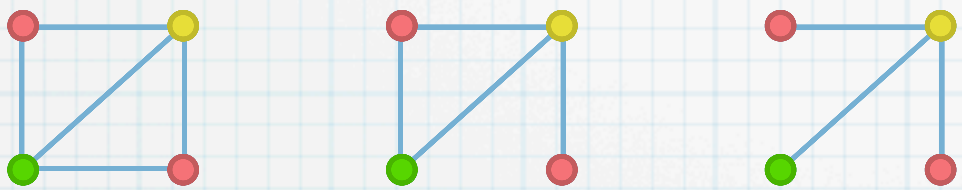
  Also ist $G$ dann ein $d$–regulärer Graph.

# Der Satz von Brooks

* **Satz 8** (Brooks, 1941):
  Sei $G$ zusammenhängend und nicht vollständig mit $\Delta(G) \geq 3$. Dann gilt $\chi(G) \leq \Delta(G)$.
* Beweis (durch Induktion über die Anzahl der Knoten $n$ von $G$):

  Induktionsanfang, $n = 4$ (da $\Delta(G) \geq 3$).

  Da $G$ nicht vollständig ist (aber schlicht und zusammenhängend), können es nur die folgenden Graphen sein:

  In jedem der drei Fälle ist die chromatische Zahl $\leq 3$.

  Sei nun $n \geq 5$ und die Aussage wahr für $n - 1$.

  Wir wissen (siehe Beweis von Satz 5), dass $G$ mit $\Delta(G)$ Farben färbbar ist, wenn es in $G$ einen Knoten $v$ gibt mit $\deg(v) < \Delta(G)$, da dessen Nachbarn zusammen höchstens $\Delta(G) - 1$ Farben haben.

  Also ist der Satz in diesem Fall bewiesen.

  Es bleibt nur der Fall, dass $G$ ein Graph ist, in dem kein solcher Knoten $v$ existiert.

  Dann ist $\deg(v) = \Delta(G) =: d$ für jeden Knoten $v$.

  Also ist $G$ dann ein $d$–regulärer Graph.

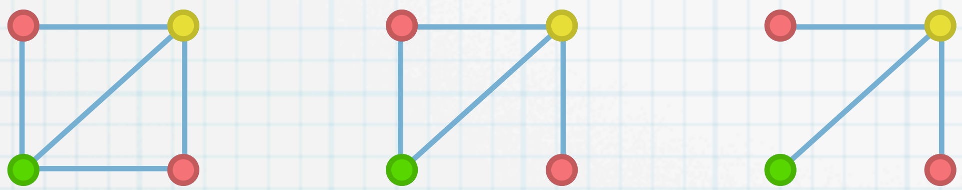
  Bleibt zu zeigen, dass $G$ eine $d$–Färbung hat.

# Der Satz von Brooks

* **Satz 8** (Brooks, 1941):
  Sei $G$ zusammenhängend und nicht vollständig mit $\Delta(G) \geq 3$. Dann gilt $\chi(G) \leq \Delta(G)$.
* Beweis (durch Induktion über die Anzahl der Knoten $n$ von $G$):

  Induktionsanfang, $n = 4$ (da $\Delta(G) \geq 3$).

  Da $G$ nicht vollständig ist (aber schlicht und zusammenhängend), können es nur die folgenden Graphen sein:

  In jedem der drei Fälle ist die chromatische Zahl $\leq 3$.

  Sei nun $n \geq 5$ und die Aussage wahr für $n - 1$.

  Wir wissen (siehe Beweis von Satz 5), dass $G$ mit $\Delta(G)$ Farben färbbar ist, wenn es in $G$ einen Knoten $v$ gibt mit $\deg(v) < \Delta(G)$, da dessen Nachbarn zusammen höchstens $\Delta(G) - 1$ Farben haben.

  Also ist der Satz in diesem Fall bewiesen.

  Es bleibt nur der Fall, dass $G$ ein Graph ist, in dem kein solcher Knoten $v$ existiert.

  Dann ist $\deg(v) = \Delta(G) =: d$ für jeden Knoten $v$.

  Also ist $G$ dann ein $d$–regulärer Graph.

  Bleibt zu zeigen, dass $G$ eine $d$–Färbung hat.

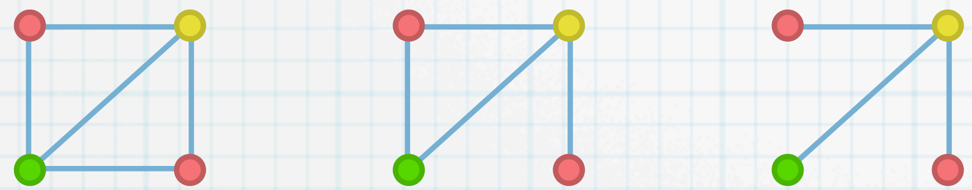
  Sei $v$ ein beliebiger Knoten von $G$.

# Der Satz von Brooks

- **Satz 8** (Brooks, 1941):
  Sei $G$ zusammenhängend und nicht vollständig mit $\Delta(G) \geq 3$. Dann gilt $\chi(G) \leq \Delta(G)$.
- Beweis (durch Induktion über die Anzahl der Knoten $n$ von $G$):

  Induktionsanfang, $n = 4$ (da $\Delta(G) \geq 3$).

  Da $G$ nicht vollständig ist (aber schlicht und zusammenhängend), können es nur die folgenden Graphen sein:

  In jedem der drei Fälle ist die chromatische Zahl $\leq 3$.

  Sei nun $n \geq 5$ und die Aussage wahr für $n - 1$.

  Wir wissen (siehe Beweis von Satz 5), dass $G$ mit $\Delta(G)$ Farben färbbar ist, wenn es in $G$ einen Knoten $v$ gibt mit $\deg(v) < \Delta(G)$, da dessen Nachbarn zusammen höchstens $\Delta(G) - 1$ Farben haben.

  Also ist der Satz in diesem Fall bewiesen.

  Es bleibt nur der Fall, dass $G$ ein Graph ist, in dem kein solcher Knoten $v$ existiert.

  Dann ist $\deg(v) = \Delta(G) =: d$ für jeden Knoten $v$.

  Also ist $G$ dann ein $d$–regulärer Graph.

  Bleibt zu zeigen, dass $G$ eine $d$–Färbung hat.

  Sei $v$ ein beliebiger Knoten von $G$.

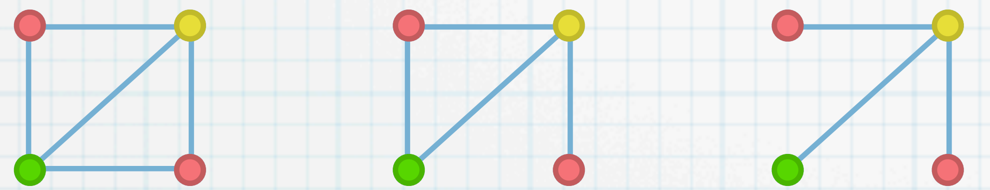
  Nach Induktionsannahme hat $G - v$ eine $d$–Färbung.

# Der Satz von Brooks

- **Satz 8** (Brooks, 1941):
  Sei $G$ zusammenhängend und nicht vollständig mit $\Delta(G) \geq 3$. Dann gilt $\chi(G) \leq \Delta(G)$.
- Beweis (durch Induktion über die Anzahl der Knoten $n$ von $G$):

  Induktionsanfang, $n = 4$ (da $\Delta(G) \geq 3$).

  Da $G$ nicht vollständig ist (aber schlicht und zusammenhängend), können es nur die folgenden Graphen sein:

  In jedem der drei Fälle ist die chromatische Zahl $\leq 3$.

  Sei nun $n \geq 5$ und die Aussage wahr für $n-1$.

  Wir wissen (siehe Beweis von Satz 5), dass $G$ mit $\Delta(G)$ Farben färbbar ist, wenn es in $G$ einen Knoten $v$ gibt mit $\deg(v) < \Delta(G)$, da dessen Nachbarn zusammen höchstens $\Delta(G) - 1$ Farben haben.

  Also ist der Satz in diesem Fall bewiesen.

  Es bleibt nur der Fall, dass $G$ ein Graph ist, in dem kein solcher Knoten $v$ existiert.

  Dann ist $\deg(v) = \Delta(G) =: d$ für jeden Knoten $v$.

  Also ist $G$ dann ein $d$–regulärer Graph.

  Bleibt zu zeigen, dass $G$ eine $d$–Färbung hat.

  Sei $v$ ein beliebiger Knoten von $G$.

  Nach Induktionsannahme hat $G - v$ eine $d$–Färbung.

  Wenn die Nachbarn von $v$ weniger als $d$ Farben verbrauchen, dann kann $v$ mit einer nicht verbrauchten Farbe gefärbt werden. Dadurch erhalten wir eine $d$–Färbung von $G$.

# Satz von Brooks (Forts.)

# Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):

# Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  Andernfalls verbrauchen die $d$ Nachbarn $v_1, \ldots, v_d$ von $v$ die Farben $1, \ldots, d$.

# Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  Andernfalls verbrauchen die $d$ Nachbarn $v_1, \dots, v_d$ von $v$ die Farben $1, \dots, d$.
  Seien $i, j$ zwei Farben und $v_i, v_j$ die Nachbarn von $v$ in der jeweiligen Farbe.

# Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  Andernfalls verbrauchen die $d$ Nachbarn $v_1, \ldots, v_d$ von $v$ die Farben $1, \ldots, d$.
  Seien $i, j$ zwei Farben und $v_i, v_j$ die Nachbarn von $v$ in der jeweiligen Farbe.
  Seien $K_i, K_j$ die Zusammenhangskomponenten von $H(i, j)$, die $v_i$ bzw. $v_j$ enthalten.

# Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):

  Andernfalls verbrauchen die $d$ Nachbarn $v_1, \ldots, v_d$ von $v$ die Farben $1, \ldots, d$.

  Seien $i, j$ zwei Farben und $v_i, v_j$ die Nachbarn von $v$ in der jeweiligen Farbe.

  Seien $K_i, K_j$ die Zusammenhangskomponenten von $H(i, j)$, die $v_i$ bzw. $v_j$ enthalten.

  1. Fall, $K_i \neq K_j$ für ein Paar von Farben $i, j$.

# Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  Andernfalls verbrauchen die $d$ Nachbarn $v_1, \ldots, v_d$ von $v$ die Farben $1, \ldots, d$.
  Seien $i, j$ zwei Farben und $v_i, v_j$ die Nachbarn von $v$ in der jeweiligen Farbe.
  Seien $K_i, K_j$ die Zusammenhangskomponenten von $H(i, j)$, die $v_i$ bzw. $v_j$ enthalten.
  1. Fall, $K_i \neq K_j$ für ein Paar von Farben $i, j$.
     Wir führen in der Kempe-Kette $K_i$ eine Umfärbung durch.

# Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  Andernfalls verbrauchen die $d$ Nachbarn $v_1, \ldots, v_d$ von $v$ die Farben $1, \ldots, d$.
  Seien $i, j$ zwei Farben und $v_i, v_j$ die Nachbarn von $v$ in der jeweiligen Farbe.
  Seien $K_i, K_j$ die Zusammenhangskomponenten von $H(i, j)$, die $v_i$ bzw. $v_j$ enthalten.
  1. Fall, $K_i \neq K_j$ für ein Paar von Farben $i, j$.
     Wir führen in der Kempe-Kette $K_i$ eine Umfärbung durch.
     Damit hat auch $v_i$ die Farbe $j$.

# Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):

  Andernfalls verbrauchen die $d$ Nachbarn $v_1, \ldots, v_d$ von $v$ die Farben $1, \ldots, d$.

  Seien $i, j$ zwei Farben und $v_i, v_j$ die Nachbarn von $v$ in der jeweiligen Farbe.

  Seien $K_i, K_j$ die Zusammenhangskomponenten von $H(i, j)$, die $v_i$ bzw. $v_j$ enthalten.

  1. Fall, $K_i \neq K_j$ für ein Paar von Farben $i, j$.

     Wir führen in der Kempe-Kette $K_i$ eine Umfärbung durch.

     Damit hat auch $v_i$ die Farbe $j$.

     Die Nachbarn von $v$ benutzen jetzt nur noch die Farben $1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, d$.

# Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):

    Andernfalls verbrauchen die $d$ Nachbarn $v_1, \ldots, v_d$ von $v$ die Farben $1, \ldots, d$.
    Seien $i, j$ zwei Farben und $v_i, v_j$ die Nachbarn von $v$ in der jeweiligen Farbe.
    Seien $K_i, K_j$ die Zusammenhangskomponenten von $H(i, j)$, die $v_i$ bzw. $v_j$ enthalten.
    1. Fall, $K_i \neq K_j$ für ein Paar von Farben $i, j$.
        Wir führen in der Kempe-Kette $K_i$ eine Umfärbung durch.
        Damit hat auch $v_i$ die Farbe $j$.
        Die Nachbarn von $v$ benutzen jetzt nur noch die Farben $1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, d$.
        Knoten $v$ kann mit Farbe $i$ gefärbt werden, und die Aussage ist gezeigt.

# Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  Andernfalls verbrauchen die $d$ Nachbarn $v_1, \ldots, v_d$ von $v$ die Farben $1, \ldots, d$.
  Seien $i, j$ zwei Farben und $v_i, v_j$ die Nachbarn von $v$ in der jeweiligen Farbe.
  Seien $K_i, K_j$ die Zusammenhangskomponenten von $H(i, j)$, die $v_i$ bzw. $v_j$ enthalten.
  1. Fall, $K_i \neq K_j$ für ein Paar von Farben $i, j$.
     Wir führen in der Kempe-Kette $K_i$ eine Umfärbung durch.
     Damit hat auch $v_i$ die Farbe $j$.
     Die Nachbarn von $v$ benutzen jetzt nur noch die Farben $1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, d$.
     Knoten $v$ kann mit Farbe $i$ gefärbt werden, und die Aussage ist gezeigt.
  2. Fall, $K_i = K_j$ für alle Farben $i, j$.

# Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  Andernfalls verbrauchen die $d$ Nachbarn $v_1, \ldots, v_d$ von $v$ die Farben $1, \ldots, d$.
  Seien $i, j$ zwei Farben und $v_i, v_j$ die Nachbarn von $v$ in der jeweiligen Farbe.
  Seien $K_i, K_j$ die Zusammenhangskomponenten von $H(i, j)$, die $v_i$ bzw. $v_j$ enthalten.
  1. Fall, $K_i \neq K_j$ für ein Paar von Farben $i, j$.
     Wir führen in der Kempe-Kette $K_i$ eine Umfärbung durch.
     Damit hat auch $v_i$ die Farbe $j$.
     Die Nachbarn von $v$ benutzen jetzt nur noch die Farben $1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, d$.
     Knoten $v$ kann mit Farbe $i$ gefärbt werden, und die Aussage ist gezeigt.
  2. Fall, $K_i = K_j$ für alle Farben $i, j$.
     Für festes $i, j$ setze (zur Abkürzung) $H := K_i$.

# Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  Andernfalls verbrauchen die $d$ Nachbarn $v_1, \ldots, v_d$ von $v$ die Farben $1, \ldots, d$.
  Seien $i, j$ zwei Farben und $v_i, v_j$ die Nachbarn von $v$ in der jeweiligen Farbe.
  Seien $K_i, K_j$ die Zusammenhangskomponenten von $H(i, j)$, die $v_i$ bzw. $v_j$ enthalten.
  1. Fall, $K_i \neq K_j$ für ein Paar von Farben $i, j$.
     Wir führen in der Kempe-Kette $K_i$ eine Umfärbung durch.
     Damit hat auch $v_i$ die Farbe $j$.
     Die Nachbarn von $v$ benutzen jetzt nur noch die Farben $1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, d$.
     Knoten $v$ kann mit Farbe $i$ gefärbt werden, und die Aussage ist gezeigt.
  2. Fall, $K_i = K_j$ für alle Farben $i, j$.
     Für festes $i, j$ setze (zur Abkürzung) $H := K_i$.
     Angenommen, $\deg_H(v_i) > 1$.

# Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  Andernfalls verbrauchen die $d$ Nachbarn $v_1, \ldots, v_d$ von $v$ die Farben $1, \ldots, d$.
  Seien $i, j$ zwei Farben und $v_i, v_j$ die Nachbarn von $v$ in der jeweiligen Farbe.
  Seien $K_i, K_j$ die Zusammenhangskomponenten von $H(i, j)$, die $v_i$ bzw. $v_j$ enthalten.
  1. Fall, $K_i \neq K_j$ für ein Paar von Farben $i, j$.
     Wir führen in der Kempe-Kette $K_i$ eine Umfärbung durch.
     Damit hat auch $v_i$ die Farbe $j$.
     Die Nachbarn von $v$ benutzen jetzt nur noch die Farben $1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, d$.
     Knoten $v$ kann mit Farbe $i$ gefärbt werden, und die Aussage ist gezeigt.
  2. Fall, $K_i = K_j$ für alle Farben $i, j$.
     Für festes $i, j$ setze (zur Abkürzung) $H := K_i$.
     Angenommen, $\deg_H(v_i) > 1$.
        Dann hat $v_i$ (mind.) zwei Nachbarn mit Farbe $j$.

# Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):

  Andernfalls verbrauchen die $d$ Nachbarn $v_1, \ldots, v_d$ von $v$ die Farben $1, \ldots, d$.

  Seien $i, j$ zwei Farben und $v_i, v_j$ die Nachbarn von $v$ in der jeweiligen Farbe.

  Seien $K_i, K_j$ die Zusammenhangskomponenten von $H(i,j)$, die $v_i$ bzw. $v_j$ enthalten.

  1. Fall, $K_i \neq K_j$ für ein Paar von Farben $i, j$.

     Wir führen in der Kempe-Kette $K_i$ eine Umfärbung durch.

     Damit hat auch $v_i$ die Farbe $j$.

     Die Nachbarn von $v$ benutzen jetzt nur noch die Farben $1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, d$.

     Knoten $v$ kann mit Farbe $i$ gefärbt werden, und die Aussage ist gezeigt.

  2. Fall, $K_i = K_j$ für alle Farben $i, j$.

     Für festes $i, j$ setze (zur Abkürzung) $H := K_i$.

     Angenommen, $\deg_H(v_i) > 1$.

     Dann hat $v_i$ (mind.) zwei Nachbarn mit Farbe $j$.

     Wenn wir jetzt alle Nachbarn von $v_i$ betrachten (im gesamten Graphen $G$), so gibt es eine Farbe $k$, die dort nicht vorkommt.

# Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  Andernfalls verbrauchen die $d$ Nachbarn $v_1, \ldots, v_d$ von $v$ die Farben $1, \ldots, d$.
  Seien $i, j$ zwei Farben und $v_i, v_j$ die Nachbarn von $v$ in der jeweiligen Farbe.
  Seien $K_i, K_j$ die Zusammenhangskomponenten von $H(i,j)$, die $v_i$ bzw. $v_j$ enthalten.
  1. Fall, $K_i \neq K_j$ für ein Paar von Farben $i, j$.
     Wir führen in der Kempe-Kette $K_i$ eine Umfärbung durch.
     Damit hat auch $v_i$ die Farbe $j$.
     Die Nachbarn von $v$ benutzen jetzt nur noch die Farben $1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, d$.
     Knoten $v$ kann mit Farbe $i$ gefärbt werden, und die Aussage ist gezeigt.
  2. Fall, $K_i = K_j$ für alle Farben $i, j$.
     Für festes $i, j$ setze (zur Abkürzung) $H := K_i$.
     Angenommen, $\deg_H(v_i) > 1$.
       Dann hat $v_i$ (mind.) zwei Nachbarn mit Farbe $j$.
       Wenn wir jetzt alle Nachbarn von $v_i$ betrachten (im gesamten Graphen $G$), so gibt es eine Farbe $k$, die dort nicht vorkommt.
       Färbe jetzt $v_i$ mit $k$.

# Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  Andernfalls verbrauchen die $d$ Nachbarn $v_1, \ldots, v_d$ von $v$ die Farben $1, \ldots, d$.
  Seien $i, j$ zwei Farben und $v_i, v_j$ die Nachbarn von $v$ in der jeweiligen Farbe.
  Seien $K_i, K_j$ die Zusammenhangskomponenten von $H(i, j)$, die $v_i$ bzw. $v_j$ enthalten.
  1. Fall, $K_i \neq K_j$ für ein Paar von Farben $i, j$.
     Wir führen in der Kempe-Kette $K_i$ eine Umfärbung durch.
     Damit hat auch $v_i$ die Farbe $j$.
     Die Nachbarn von $v$ benutzen jetzt nur noch die Farben $1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, d$.
     Knoten $v$ kann mit Farbe $i$ gefärbt werden, und die Aussage ist gezeigt.
  2. Fall, $K_i = K_j$ für alle Farben $i, j$.
     Für festes $i, j$ setze (zur Abkürzung) $H := K_i$.
     Angenommen, $\deg_H(v_i) > 1$.
        Dann hat $v_i$ (mind.) zwei Nachbarn mit Farbe $j$.
        Wenn wir jetzt alle Nachbarn von $v_i$ betrachten (im gesamten Graphen $G$), so gibt es eine Farbe $k$, die dort nicht vorkommt.
        Färbe jetzt $v_i$ mit $k$.
        Dann kann $v$ mit $i$ gefärbt werden. Fertig.

# Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  Andernfalls verbrauchen die $d$ Nachbarn $v_1, \ldots, v_d$ von $v$ die Farben $1, \ldots, d$.
  Seien $i, j$ zwei Farben und $v_i, v_j$ die Nachbarn von $v$ in der jeweiligen Farbe.
  Seien $K_i, K_j$ die Zusammenhangskomponenten von $H(i, j)$, die $v_i$ bzw. $v_j$ enthalten.
  1. Fall, $K_i \neq K_j$ für ein Paar von Farben $i, j$.
     Wir führen in der Kempe-Kette $K_i$ eine Umfärbung durch.
     Damit hat auch $v_i$ die Farbe $j$.
     Die Nachbarn von $v$ benutzen jetzt nur noch die Farben $1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, d$.
     Knoten $v$ kann mit Farbe $i$ gefärbt werden, und die Aussage ist gezeigt.
  2. Fall, $K_i = K_j$ für alle Farben $i, j$.
     Für festes $i, j$ setze (zur Abkürzung) $H := K_i$.
     Angenommen, $\deg_H(v_i) > 1$.
        Dann hat $v_i$ (mind.) zwei Nachbarn mit Farbe $j$.
        Wenn wir jetzt alle Nachbarn von $v_i$ betrachten (im gesamten Graphen $G$), so gibt es eine Farbe $k$, die dort nicht vorkommt.
        Färbe jetzt $v_i$ mit $k$.
        Dann kann $v$ mit $i$ gefärbt werden. Fertig.
     Analog argumentiert man für $\deg_H(v_j) > 1$.

# Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  Andernfalls verbrauchen die $d$ Nachbarn $v_1, \ldots, v_d$ von $v$ die Farben $1, \ldots, d$.
  Seien $i, j$ zwei Farben und $v_i, v_j$ die Nachbarn von $v$ in der jeweiligen Farbe.
  Seien $K_i, K_j$ die Zusammenhangskomponenten von $H(i, j)$, die $v_i$ bzw. $v_j$ enthalten.
  1. Fall, $K_i \neq K_j$ für ein Paar von Farben $i, j$.
     Wir führen in der Kempe-Kette $K_i$ eine Umfärbung durch.
     Damit hat auch $v_i$ die Farbe $j$.
     Die Nachbarn von $v$ benutzen jetzt nur noch die Farben $1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, d$.
     Knoten $v$ kann mit Farbe $i$ gefärbt werden, und die Aussage ist gezeigt.
  2. Fall, $K_i = K_j$ für alle Farben $i, j$.
     Für festes $i, j$ setze (zur Abkürzung) $H := K_i$.
     Angenommen, $\deg_H(v_i) > 1$.
       Dann hat $v_i$ (mind.) zwei Nachbarn mit Farbe $j$.
       Wenn wir jetzt alle Nachbarn von $v_i$ betrachten (im gesamten Graphen $G$), so gibt es eine Farbe $k$, die dort nicht vorkommt.
       Färbe jetzt $v_i$ mit $k$.
       Dann kann $v$ mit $i$ gefärbt werden. Fertig.
     Analog argumentiert man für $\deg_H(v_j) > 1$.
     Also kann im Folgenden $\deg_H(v_i) = \deg_H(v_j) = 1$ angenommen werden.

# Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  Andernfalls verbrauchen die $d$ Nachbarn $v_1, \ldots, v_d$ von $v$ die Farben $1, \ldots, d$.
  Seien $i, j$ zwei Farben und $v_i, v_j$ die Nachbarn von $v$ in der jeweiligen Farbe.
  Seien $K_i, K_j$ die Zusammenhangskomponenten von $H(i, j)$, die $v_i$ bzw. $v_j$ enthalten.
  1. Fall, $K_i \neq K_j$ für ein Paar von Farben $i, j$.
     Wir führen in der Kempe-Kette $K_i$ eine Umfärbung durch.
     Damit hat auch $v_i$ die Farbe $j$.
     Die Nachbarn von $v$ benutzen jetzt nur noch die Farben $1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, d$.
     Knoten $v$ kann mit Farbe $i$ gefärbt werden, und die Aussage ist gezeigt.
  2. Fall, $K_i = K_j$ für alle Farben $i, j$.
     Für festes $i, j$ setze (zur Abkürzung) $H := K_i$.
     Angenommen, $\deg_H(v_i) > 1$.
        Dann hat $v_i$ (mind.) zwei Nachbarn mit Farbe $j$.
        Wenn wir jetzt alle Nachbarn von $v_i$ betrachten (im gesamten Graphen $G$), so gibt es eine Farbe $k$, die dort nicht vorkommt.
        Färbe jetzt $v_i$ mit $k$.
        Dann kann $v$ mit $i$ gefärbt werden. Fertig.
     Analog argumentiert man für $\deg_H(v_j) > 1$.
     Also kann im Folgenden $\deg_H(v_i) = \deg_H(v_j) = 1$ angenommen werden.
     Sei $P = (v_i, \ldots, v_j)$ ein Weg in $H$.

# Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):

  Andernfalls verbrauchen die $d$ Nachbarn $v_1, \ldots, v_d$ von $v$ die Farben $1, \ldots, d$.

  Seien $i, j$ zwei Farben und $v_i, v_j$ die Nachbarn von $v$ in der jeweiligen Farbe.

  Seien $K_i, K_j$ die Zusammenhangskomponenten von $H(i, j)$, die $v_i$ bzw. $v_j$ enthalten.

  1. Fall, $K_i \neq K_j$ für ein Paar von Farben $i, j$.

     Wir führen in der Kempe-Kette $K_i$ eine Umfärbung durch.

     Damit hat auch $v_i$ die Farbe $j$.

     Die Nachbarn von $v$ benutzen jetzt nur noch die Farben $1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, d$.

     Knoten $v$ kann mit Farbe $i$ gefärbt werden, und die Aussage ist gezeigt.

  2. Fall, $K_i = K_j$ für alle Farben $i, j$.

     Für festes $i, j$ setze (zur Abkürzung) $H := K_i$.

     Angenommen, $\deg_H(v_i) > 1$.

     Dann hat $v_i$ (mind.) zwei Nachbarn mit Farbe $j$.

     Wenn wir jetzt alle Nachbarn von $v_i$ betrachten (im gesamten Graphen $G$), so gibt es eine Farbe $k$, die dort nicht vorkommt.

     Färbe jetzt $v_i$ mit $k$.

     Dann kann $v$ mit $i$ gefärbt werden. Fertig.

     Analog argumentiert man für $\deg_H(v_j) > 1$.

     Also kann im Folgenden $\deg_H(v_i) = \deg_H(v_j) = 1$ angenommen werden.

     Sei $P = (v_i, \ldots, v_j)$ ein Weg in $H$.

     Angenommen, es gibt einen Knoten $u$ in $P$ mit $\deg_H(u) \geq 3$.

# Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):

  Andernfalls verbrauchen die $d$ Nachbarn $v_1, \ldots, v_d$ von $v$ die Farben $1, \ldots, d$.

  Seien $i, j$ zwei Farben und $v_i, v_j$ die Nachbarn von $v$ in der jeweiligen Farbe.

  Seien $K_i, K_j$ die Zusammenhangskomponenten von $H(i, j)$, die $v_i$ bzw. $v_j$ enthalten.

  1. Fall, $K_i \neq K_j$ für ein Paar von Farben $i, j$.

     Wir führen in der Kempe-Kette $K_i$ eine Umfärbung durch.

     Damit hat auch $v_i$ die Farbe $j$.

     Die Nachbarn von $v$ benutzen jetzt nur noch die Farben $1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, d$.

     Knoten $v$ kann mit Farbe $i$ gefärbt werden, und die Aussage ist gezeigt.

  2. Fall, $K_i = K_j$ für alle Farben $i, j$.

     Für festes $i, j$ setze (zur Abkürzung) $H := K_i$.

     Angenommen, $\deg_H(v_i) > 1$.

       Dann hat $v_i$ (mind.) zwei Nachbarn mit Farbe $j$.

       Wenn wir jetzt alle Nachbarn von $v_i$ betrachten (im gesamten Graphen $G$), so gibt es eine Farbe $k$, die dort nicht vorkommt.

       Färbe jetzt $v_i$ mit $k$.

       Dann kann $v$ mit $i$ gefärbt werden. Fertig.

     Analog argumentiert man für $\deg_H(v_j) > 1$.

     Also kann im Folgenden $\deg_H(v_i) = \deg_H(v_j) = 1$ angenommen werden.

     Sei $P = (v_i, \ldots, v_j)$ ein Weg in $H$.

     Angenommen, es gibt einen Knoten $u$ in $P$ mit $\deg_H(u) \geq 3$.

       Sei $u$ ferner der erste derartige Knoten in $P$, und o.B.d.A habe $u$ die Farbe $i$.

# Satz von Brooks (Forts.)

# Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):

# Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  In $G$ sind (mind.) drei Nachbarn von $u$ mit Farbe $j$ gefärbt.

# Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):

  In $G$ sind (mind.) drei Nachbarn von $u$ mit Farbe $j$ gefärbt.
  Also gibt es eine Farbe $k$, die für die Nachbarn von $u$ nicht verwendet wurde.

# Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  In $G$ sind (mind.) drei Nachbarn von $u$ mit Farbe $j$ gefärbt.
  Also gibt es eine Farbe $k$, die für die Nachbarn von $u$ nicht verwendet wurde.
  Färbe nun $u$ mit Farbe $k$.

# Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):

  In $G$ sind (mind.) drei Nachbarn von $u$ mit Farbe $j$ gefärbt.

  Also gibt es eine Farbe $k$, die für die Nachbarn von $u$ nicht verwendet wurde.

  Färbe nun $u$ mit Farbe $k$.

  Dann können die Knoten von $v_i$ (einschl.) bis $u$ (ausschl.) in $P$ umgefärbt werden.

# Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):

  In $G$ sind (mind.) drei Nachbarn von $u$ mit Farbe $j$ gefärbt.
  Also gibt es eine Farbe $k$, die für die Nachbarn von $u$ nicht verwendet wurde.
  Färbe nun $u$ mit Farbe $k$.
  Dann können die Knoten von $v_i$ (einschl.) bis $u$ (ausschl.) in $P$ umgefärbt werden.
  Danach hat $v_i$ die Farbe $j$.

# Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  In $G$ sind (mind.) drei Nachbarn von $u$ mit Farbe $j$ gefärbt.
  Also gibt es eine Farbe $k$, die für die Nachbarn von $u$ nicht verwendet wurde.
  Färbe nun $u$ mit Farbe $k$.
  Dann können die Knoten von $v_i$ (einschl.) bis $u$ (ausschl.) in $P$ umgefärbt werden.
  Danach hat $v_i$ die Farbe $j$.
  $v_j$ hatte ohnehin die Farbe $j$.

# Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  In $G$ sind (mind.) drei Nachbarn von $u$ mit Farbe $j$ gefärbt.
  Also gibt es eine Farbe $k$, die für die Nachbarn von $u$ nicht verwendet wurde.
  Färbe nun $u$ mit Farbe $k$.
  Dann können die Knoten von $v_i$ (einschl.) bis $u$ (ausschl.) in $P$ umgefärbt werden.
  Danach hat $v_i$ die Farbe $j$.
  $v_j$ hatte ohnehin die Farbe $j$.
  Also kann $v$ mit $i$ gefärbt werden. Fertig.

# Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):

  In $G$ sind (mind.) drei Nachbarn von $u$ mit Farbe $j$ gefärbt.

  Also gibt es eine Farbe $k$, die für die Nachbarn von $u$ nicht verwendet wurde.

  Färbe nun $u$ mit Farbe $k$.

  Dann können die Knoten von $v_i$ (einschl.) bis $u$ (ausschl.) in $P$ umgefärbt werden.

  Danach hat $v_i$ die Farbe $j$.

  $v_j$ hatte ohnehin die Farbe $j$.

  Also kann $v$ mit $i$ gefärbt werden. Fertig.

  Also bleibt der Fall, dass $\deg_H(u) = 2$ für alle Knoten $u$ in $P, u \neq v_i, v_j$.

# Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):

    In $G$ sind (mind.) drei Nachbarn von $u$ mit Farbe $j$ gefärbt.

    Also gibt es eine Farbe $k$, die für die Nachbarn von $u$ nicht verwendet wurde.

    Färbe nun $u$ mit Farbe $k$.

    Dann können die Knoten von $v_i$ (einschl.) bis $u$ (ausschl.) in $P$ umgefärbt werden.

    Danach hat $v_i$ die Farbe $j$.

    $v_j$ hatte ohnehin die Farbe $j$.

    Also kann $v$ mit $i$ gefärbt werden. Fertig.

  Also bleibt der Fall, dass $\deg_H(u) = 2$ für alle Knoten $u$ in $P, u \neq v_i, v_j$.

    Das bedeutet $H = P$. $H$ besteht aus einem Weg von $v_i$ nach $v_j$.

# Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):
    - In $G$ sind (mind.) drei Nachbarn von $u$ mit Farbe $j$ gefärbt.
    - Also gibt es eine Farbe $k$, die für die Nachbarn von $u$ nicht verwendet wurde.
    - Färbe nun $u$ mit Farbe $k$.
    - Dann können die Knoten von $v_i$ (einschl.) bis $u$ (ausschl.) in $P$ umgefärbt werden.
    - Danach hat $v_i$ die Farbe $j$.
    - $v_j$ hatte ohnehin die Farbe $j$.
    - Also kann $v$ mit $i$ gefärbt werden. Fertig.
  - Also bleibt der Fall, dass $\deg_H(u) = 2$ für alle Knoten $u$ in $P, u \neq v_i, v_j$.
    - Das bedeutet $H = P$. $H$ besteht aus einem Weg von $v_i$ nach $v_j$.
    - Da dieses für beliebige Knoten $v_i, v_j$ in der Nachbarschaft von $v$ gilt, sind also alle Kempe-Ketten Wege.

# Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):
    - In $G$ sind (mind.) drei Nachbarn von $u$ mit Farbe $j$ gefärbt.
    - Also gibt es eine Farbe $k$, die für die Nachbarn von $u$ nicht verwendet wurde.
    - Färbe nun $u$ mit Farbe $k$.
    - Dann können die Knoten von $v_i$ (einschl.) bis $u$ (ausschl.) in $P$ umgefärbt werden.
    - Danach hat $v_i$ die Farbe $j$.
    - $v_j$ hatte ohnehin die Farbe $j$.
    - Also kann $v$ mit $i$ gefärbt werden. Fertig.
  - Also bleibt der Fall, dass $\deg_H(u) = 2$ für alle Knoten $u$ in $P, u \neq v_i, v_j$.
    - Das bedeutet $H = P$. $H$ besteht aus einem Weg von $v_i$ nach $v_j$.
    - Da dieses für beliebige Knoten $v_i, v_j$ in der Nachbarschaft von $v$ gilt, sind also alle Kempe-Ketten Wege.
    - Sei $H$ wie bisher die zu $v_i, v_j$ gehörige Kette, und $K$ die zu $v_i, v_k$ gehörige Kette, $j \neq k$.

# Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):

  In $G$ sind (mind.) drei Nachbarn von $u$ mit Farbe $j$ gefärbt.

  Also gibt es eine Farbe $k$, die für die Nachbarn von $u$ nicht verwendet wurde.

  Färbe nun $u$ mit Farbe $k$.

  Dann können die Knoten von $v_i$ (einschl.) bis $u$ (ausschl.) in $P$ umgefärbt werden.

  Danach hat $v_i$ die Farbe $j$.

  $v_j$ hatte ohnehin die Farbe $j$.

  Also kann $v$ mit $i$ gefärbt werden. Fertig.

  Also bleibt der Fall, dass $\deg_H(u) = 2$ für alle Knoten $u$ in $P, u \neq v_i, v_j$.

  Das bedeutet $H = P$. $H$ besteht aus einem Weg von $v_i$ nach $v_j$.

  Da dieses für beliebige Knoten $v_i, v_j$ in der Nachbarschaft von $v$ gilt, sind also alle Kempe-Ketten Wege.

  Sei $H$ wie bisher die zu $v_i, v_j$ gehörige Kette, und $K$ die zu $v_i, v_k$ gehörige Kette, $j \neq k$.

  Angenommen, es gibt einen Knoten $w \in H \cap K, w \neq v_i$.

# Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):
    - In $G$ sind (mind.) drei Nachbarn von $u$ mit Farbe $j$ gefärbt.
    - Also gibt es eine Farbe $k$, die für die Nachbarn von $u$ nicht verwendet wurde.
    - Färbe nun $u$ mit Farbe $k$.
    - Dann können die Knoten von $v_i$ (einschl.) bis $u$ (ausschl.) in $P$ umgefärbt werden.
    - Danach hat $v_i$ die Farbe $j$.
    - $v_j$ hatte ohnehin die Farbe $j$.
    - Also kann $v$ mit $i$ gefärbt werden. Fertig.
  - Also bleibt der Fall, dass $\deg_H(u) = 2$ für alle Knoten $u$ in $P, u \neq v_i, v_j$.
    - Das bedeutet $H = P$. $H$ besteht aus einem Weg von $v_i$ nach $v_j$.
    - Da dieses für beliebige Knoten $v_i, v_j$ in der Nachbarschaft von $v$ gilt, sind also alle Kempe–Ketten Wege.
    - Sei $H$ wie bisher die zu $v_i, v_j$ gehörige Kette, und $K$ die zu $v_i, v_k$ gehörige Kette, $j \neq k$.
    - Angenommen, es gibt einen Knoten $w \in H \cap K, w \neq v_i$.
      - Dann ist $w$ mit Farbe $i$ gefärbt und hat je zwei Nachbarn mit Farbe $j$ und $k$.

# Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  - In $G$ sind (mind.) drei Nachbarn von $u$ mit Farbe $j$ gefärbt.
  - Also gibt es eine Farbe $k$, die für die Nachbarn von $u$ nicht verwendet wurde.
  - Färbe nun $u$ mit Farbe $k$.
  - Dann können die Knoten von $v_i$ (einschl.) bis $u$ (ausschl.) in $P$ umgefärbt werden.
  - Danach hat $v_i$ die Farbe $j$.
  - $v_j$ hatte ohnehin die Farbe $j$.
  - Also kann $v$ mit $i$ gefärbt werden. Fertig.
  - Also bleibt der Fall, dass $\deg_H(u) = 2$ für alle Knoten $u$ in $P, u \neq v_i, v_j$.
    - Das bedeutet $H = P$. $H$ besteht aus einem Weg von $v_i$ nach $v_j$.
    - Da dieses für beliebige Knoten $v_i, v_j$ in der Nachbarschaft von $v$ gilt, sind also alle Kempe-Ketten Wege.
    - Sei $H$ wie bisher die zu $v_i, v_j$ gehörige Kette, und $K$ die zu $v_i, v_k$ gehörige Kette, $j \neq k$.
    - Angenommen, es gibt einen Knoten $w \in H \cap K, w \neq v_i$.
      - Dann ist $w$ mit Farbe $i$ gefärbt und hat je zwei Nachbarn mit Farbe $j$ und $k$.
      - Unter den Nachbarn von $w$ in $G$ gibt es dann eine Farbe $l$, die nicht verwendet wurde.

# Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):
    - In $G$ sind (mind.) drei Nachbarn von $u$ mit Farbe $j$ gefärbt.
    - Also gibt es eine Farbe $k$, die für die Nachbarn von $u$ nicht verwendet wurde.
    - Färbe nun $u$ mit Farbe $k$.
    - Dann können die Knoten von $v_i$ (einschl.) bis $u$ (ausschl.) in $P$ umgefärbt werden.
    - Danach hat $v_i$ die Farbe $j$.
    - $v_j$ hatte ohnehin die Farbe $j$.
    - Also kann $v$ mit $i$ gefärbt werden. Fertig.
  - Also bleibt der Fall, dass $\deg_H(u) = 2$ für alle Knoten $u$ in $P, u \neq v_i, v_j$.
    - Das bedeutet $H = P$. $H$ besteht aus einem Weg von $v_i$ nach $v_j$.
    - Da dieses für beliebige Knoten $v_i, v_j$ in der Nachbarschaft von $v$ gilt, sind also alle Kempe-Ketten Wege.
    - Sei $H$ wie bisher die zu $v_i, v_j$ gehörige Kette, und $K$ die zu $v_i, v_k$ gehörige Kette, $j \neq k$.
    - Angenommen, es gibt einen Knoten $w \in H \cap K, w \neq v_i$.
      - Dann ist $w$ mit Farbe $i$ gefärbt und hat je zwei Nachbarn mit Farbe $j$ und $k$.
      - Unter den Nachbarn von $w$ in $G$ gibt es dann eine Farbe $l$, die nicht verwendet wurde.
      - Färbe nun $w$ mit Farbe $l$.

# Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  - In $G$ sind (mind.) drei Nachbarn von $u$ mit Farbe $j$ gefärbt.
  - Also gibt es eine Farbe $k$, die für die Nachbarn von $u$ nicht verwendet wurde.
  - Färbe nun $u$ mit Farbe $k$.
  - Dann können die Knoten von $v_i$ (einschl.) bis $u$ (ausschl.) in $P$ umgefärbt werden.
  - Danach hat $v_i$ die Farbe $j$.
  - $v_j$ hatte ohnehin die Farbe $j$.
  - Also kann $v$ mit $i$ gefärbt werden. Fertig.
  
  Also bleibt der Fall, dass $\deg_H(u) = 2$ für alle Knoten $u$ in $P, u \neq v_i, v_j$.
  - Das bedeutet $H = P$. $H$ besteht aus einem Weg von $v_i$ nach $v_j$.
  - Da dieses für beliebige Knoten $v_i, v_j$ in der Nachbarschaft von $v$ gilt, sind also alle Kempe-Ketten Wege.
  - Sei $H$ wie bisher die zu $v_i, v_j$ gehörige Kette, und $K$ die zu $v_i, v_k$ gehörige Kette, $j \neq k$.
  - Angenommen, es gibt einen Knoten $w \in H \cap K, w \neq v_i$.
    - Dann ist $w$ mit Farbe $i$ gefärbt und hat je zwei Nachbarn mit Farbe $j$ und $k$.
    - Unter den Nachbarn von $w$ in $G$ gibt es dann eine Farbe $l$, die nicht verwendet wurde.
    - Färbe nun $w$ mit Farbe $l$.
    - Dann können die Knoten von $K$ zwischen $w$ (ausschl.) und $v_k$ (einschl.) umgefärbt werden.

# Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  - In $G$ sind (mind.) drei Nachbarn von $u$ mit Farbe $j$ gefärbt.
  - Also gibt es eine Farbe $k$, die für die Nachbarn von $u$ nicht verwendet wurde.
  - Färbe nun $u$ mit Farbe $k$.
  - Dann können die Knoten von $v_i$ (einschl.) bis $u$ (ausschl.) in $P$ umgefärbt werden.
  - Danach hat $v_i$ die Farbe $j$.
  - $v_j$ hatte ohnehin die Farbe $j$.
  - Also kann $v$ mit $i$ gefärbt werden. Fertig.
  
  Also bleibt der Fall, dass $\deg_H(u) = 2$ für alle Knoten $u$ in $P, u \neq v_i, v_j$.
  - Das bedeutet $H = P$. $H$ besteht aus einem Weg von $v_i$ nach $v_j$.
  - Da dieses für beliebige Knoten $v_i, v_j$ in der Nachbarschaft von $v$ gilt, sind also alle Kempe-Ketten Wege.
  - Sei $H$ wie bisher die zu $v_i, v_j$ gehörige Kette, und $K$ die zu $v_i, v_k$ gehörige Kette, $j \neq k$.
  - Angenommen, es gibt einen Knoten $w \in H \cap K, w \neq v_i$.
    - Dann ist $w$ mit Farbe $i$ gefärbt und hat je zwei Nachbarn mit Farbe $j$ und $k$.
    - Unter den Nachbarn von $w$ in $G$ gibt es dann eine Farbe $l$, die nicht verwendet wurde.
    - Färbe nun $w$ mit Farbe $l$.
    - Dann können die Knoten von $K$ zwischen $w$ (ausschl.) und $v_k$ (einschl.) umgefärbt werden.
    - Danach hat $v_k$ die Farbe $i$. $v_i$ hatte ohnehin die Farbe $i$.

# Satz von Brooks (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  - In $G$ sind (mind.) drei Nachbarn von $u$ mit Farbe $j$ gefärbt.
  - Also gibt es eine Farbe $k$, die für die Nachbarn von $u$ nicht verwendet wurde.
  - Färbe nun $u$ mit Farbe $k$.
  - Dann können die Knoten von $v_i$ (einschl.) bis $u$ (ausschl.) in $P$ umgefärbt werden.
  - Danach hat $v_i$ die Farbe $j$.
  - $v_j$ hatte ohnehin die Farbe $j$.
  - Also kann $v$ mit $i$ gefärbt werden. Fertig.
  - Also bleibt der Fall, dass $\deg_H(u) = 2$ für alle Knoten $u$ in $P, u \neq v_i, v_j$.
    - Das bedeutet $H = P$. $H$ besteht aus einem Weg von $v_i$ nach $v_j$.
    - Da dieses für beliebige Knoten $v_i, v_j$ in der Nachbarschaft von $v$ gilt, sind also alle Kempe-Ketten Wege.
    - Sei $H$ wie bisher die zu $v_i, v_j$ gehörige Kette, und $K$ die zu $v_i, v_k$ gehörige Kette, $j \neq k$.
    - Angenommen, es gibt einen Knoten $w \in H \cap K, w \neq v_i$.
      - Dann ist $w$ mit Farbe $i$ gefärbt und hat je zwei Nachbarn mit Farbe $j$ und $k$.
      - Unter den Nachbarn von $w$ in $G$ gibt es dann eine Farbe $l$, die nicht verwendet wurde.
      - Färbe nun $w$ mit Farbe $l$.
      - Dann können die Knoten von $K$ zwischen $w$ (ausschl.) und $v_k$ (einschl.) umgefärbt werden.
      - Danach hat $v_k$ die Farbe $i$. $v_i$ hatte ohnehin die Farbe $i$.
      - Also kann $v$ mit $k$ gefärbt werden. Fertig.

# Satz von Brooks (Ende)

# Satz von Brooks (Ende)

* Beweis (Ende):

# Satz von Brooks (Ende)

* Beweis (Ende):
  Es bleibt nur noch der Fall, dass $v_i$ der einzige Knoten in $H \cap K$ ist.

# Satz von Brooks (Ende)

* Beweis (Ende):

    Es bleibt nur noch der Fall, dass $v_i$ der einzige Knoten in $H \cap K$ ist.

    Wir fassen zusammen: $v_i$ und $v_j$ sind Nachbarn von $v$. Die Kempe-Ketten $H$ und $K$ sind Wege von $v_i$ nach $v_j$ bzw. $v_i$ nach $v_k$. Ihr gemeinsamer Schnitt ist nur der Endknoten $v_i$.

# Satz von Brooks (Ende)

* Beweis (Ende):

  Es bleibt nur noch der Fall, dass $v_i$ der einzige Knoten in $H \cap K$ ist.

  Wir fassen zusammen: $v_i$ und $v_j$ sind Nachbarn von $v$. Die Kempe-Ketten $H$ und $K$ sind Wege von $v_i$ nach $v_j$ bzw. $v_i$ nach $v_k$. Ihr gemeinsamer Schnitt ist nur der Endknoten $v_i$.

  Angenommen, $v_i$ und $v_j$ sind nicht adjazent.

# Satz von Brooks (Ende)

* Beweis (Ende):

  Es bleibt nur noch der Fall, dass $v_i$ der einzige Knoten in $H \cap K$ ist.

  Wir fassen zusammen: $v_i$ und $v_j$ sind Nachbarn von $v$. Die Kempe-Ketten $H$ und $K$ sind Wege von $v_i$ nach $v_j$ bzw. $v_i$ nach $v_k$. Ihr gemeinsamer Schnitt ist nur der Endknoten $v_i$.

  Angenommen, $v_i$ und $v_j$ sind nicht adjazent.

  Sei $w$ ein Knoten mit Farbe $j$ in $H$, adjazent zu $v_i$.

# Satz von Brooks (Ende)

* Beweis (Ende):

  Es bleibt nur noch der Fall, dass $v_i$ der einzige Knoten in $H \cap K$ ist.

  Wir fassen zusammen: $v_i$ und $v_j$ sind Nachbarn von $v$. Die Kempe-Ketten $H$ und $K$ sind Wege von $v_i$ nach $v_j$ bzw. $v_i$ nach $v_k$. Ihr gemeinsamer Schnitt ist nur der Endknoten $v_i$.

  Angenommen, $v_i$ und $v_j$ sind nicht adjazent.

  Sei $w$ ein Knoten mit Farbe $j$ in $H$, adjazent zu $v_i$.

  In $K$ führen wir eine Kempesche Kettenumfärbung durch. Dadurch ergibt sich eine neue zulässige Färbung von $G$.

# Satz von Brooks (Ende)

* Beweis (Ende):
  - Es bleibt nur noch der Fall, dass $v_i$ der einzige Knoten in $H \cap K$ ist.
    - Wir fassen zusammen: $v_i$ und $v_j$ sind Nachbarn von $v$. Die Kempe-Ketten $H$ und $K$ sind Wege von $v_i$ nach $v_j$ bzw. $v_i$ nach $v_k$. Ihr gemeinsamer Schnitt ist nur der Endknoten $v_i$.
    - Angenommen, $v_i$ und $v_j$ sind nicht adjazent.
      - Sei $w$ ein Knoten mit Farbe $j$ in $H$, adjazent zu $v_i$.
      - In $K$ führen wir eine Kempesche Kettenumfärbung durch. Dadurch ergibt sich eine neue zulässige Färbung von $G$.
      - Danach hat $v_i$ die Farbe $k$ und $v_k$ die Farbe $i$.

# Satz von Brooks (Ende)

- Beweis (Ende):
  - Es bleibt nur noch der Fall, dass $v_i$ der einzige Knoten in $H \cap K$ ist.
    - Wir fassen zusammen: $v_i$ und $v_j$ sind Nachbarn von $v$. Die Kempe-Ketten $H$ und $K$ sind Wege von $v_i$ nach $v_j$ bzw. $v_i$ nach $v_k$. Ihr gemeinsamer Schnitt ist nur der Endknoten $v_i$.
    - Angenommen, $v_i$ und $v_j$ sind nicht adjazent.
      - Sei $w$ ein Knoten mit Farbe $j$ in $H$, adjazent zu $v_i$.
      - In $K$ führen wir eine Kempesche Kettenumfärbung durch. Dadurch ergibt sich eine neue zulässige Färbung von $G$.
      - Danach hat $v_i$ die Farbe $k$ und $v_k$ die Farbe $i$.
      - $w$ hat dann die Farbe $i$ und ist weiterhin in $H$.

# Satz von Brooks (Ende)

- Beweis (Ende):

  Es bleibt nur noch der Fall, dass $v_i$ der einzige Knoten in $H \cap K$ ist.

  Wir fassen zusammen: $v_i$ und $v_j$ sind Nachbarn von $v$. Die Kempe-Ketten $H$ und $K$ sind Wege von $v_i$ nach $v_j$ bzw. $v_i$ nach $v_k$. Ihr gemeinsamer Schnitt ist nur der Endknoten $v_i$.

  Angenommen, $v_i$ und $v_j$ sind nicht adjazent.

  Sei $w$ ein Knoten mit Farbe $j$ in $H$, adjazent zu $v_i$.

  In $K$ führen wir eine Kempesche Kettenumfärbung durch. Dadurch ergibt sich eine neue zulässige Färbung von $G$.

  Danach hat $v_i$ die Farbe $k$ und $v_k$ die Farbe $i$.

  $w$ hat dann die Farbe $i$ und ist weiterhin in $H$.

  Da $w$ adjazent zu $v_i$ ist, liegt $w$ auch in $K$ (die Zusammenhangskomponente der Farben $i$ und $k$ ).

# Satz von Brooks (Ende)

* Beweis (Ende):
  - Es bleibt nur noch der Fall, dass $v_i$ der einzige Knoten in $H \cap K$ ist.
    - Wir fassen zusammen: $v_i$ und $v_j$ sind Nachbarn von $v$. Die Kempe-Ketten $H$ und $K$ sind Wege von $v_i$ nach $v_j$ bzw. $v_i$ nach $v_k$. Ihr gemeinsamer Schnitt ist nur der Endknoten $v_i$.
    - Angenommen, $v_i$ und $v_j$ sind nicht adjazent.
      - Sei $w$ ein Knoten mit Farbe $j$ in $H$, adjazent zu $v_i$.
      - In $K$ führen wir eine Kempesche Kettenumfärbung durch. Dadurch ergibt sich eine neue zulässige Färbung von $G$.
      - Danach hat $v_i$ die Farbe $k$ und $v_k$ die Farbe $i$.
      - $w$ hat dann die Farbe $i$ und ist weiterhin in $H$.
      - Da $w$ adjazent zu $v_i$ ist, liegt $w$ auch in $K$ (die Zusammenhangskomponente der Farben $i$ und $k$ ).
      - Also haben wir jetzt einen weiteren Knoten gefunden, verschieden von $v_i$, der in $H$ und $K$ liegt. Fertig (siehe vorheriger Fall).

# Satz von Brooks (Ende)

* Beweis (Ende):
  Es bleibt nur noch der Fall, dass $v_i$ der einzige Knoten in $H \cap K$ ist.
  Wir fassen zusammen: $v_i$ und $v_j$ sind Nachbarn von $v$. Die Kempe-Ketten $H$ und $K$ sind Wege von $v_i$ nach $v_j$ bzw. $v_i$ nach $v_k$. Ihr gemeinsamer Schnitt ist nur der Endknoten $v_i$.
  Angenommen, $v_i$ und $v_j$ sind nicht adjazent.
  Sei $w$ ein Knoten mit Farbe $j$ in $H$, adjazent zu $v_i$.
  In $K$ führen wir eine Kempesche Kettenumfärbung durch. Dadurch ergibt sich eine neue zulässige Färbung von $G$.
  Danach hat $v_i$ die Farbe $k$ und $v_k$ die Farbe $i$.
  $w$ hat dann die Farbe $i$ und ist weiterhin in $H$.
  Da $w$ adjazent zu $v_i$ ist, liegt $w$ auch in $K$ (die Zusammenhangskomponente der Farben $i$ und $k$ ).
  Also haben wir jetzt einen weiteren Knoten gefunden, verschieden von $v_i$, der in $H$ und $K$ liegt. Fertig (siehe vorheriger Fall).
  Angenommen, $v_i$ und $v_j$ sind adjazent.

# Satz von Brooks (Ende)

- Beweis (Ende):

  Es bleibt nur noch der Fall, dass $v_i$ der einzige Knoten in $H \cap K$ ist.

  Wir fassen zusammen: $v_i$ und $v_j$ sind Nachbarn von $v$. Die Kempe-Ketten $H$ und $K$ sind Wege von $v_i$ nach $v_j$ bzw. $v_i$ nach $v_k$. Ihr gemeinsamer Schnitt ist nur der Endknoten $v_i$.

  Angenommen, $v_i$ und $v_j$ sind nicht adjazent.

  Sei $w$ ein Knoten mit Farbe $j$ in $H$, adjazent zu $v_i$.

  In $K$ führen wir eine Kempesche Kettenumfärbung durch. Dadurch ergibt sich eine neue zulässige Färbung von $G$.

  Danach hat $v_i$ die Farbe $k$ und $v_k$ die Farbe $i$.

  $w$ hat dann die Farbe $i$ und ist weiterhin in $H$.

  Da $w$ adjazent zu $v_i$ ist, liegt $w$ auch in $K$ (die Zusammenhangskomponente der Farben $i$ und $k$ ).

  Also haben wir jetzt einen weiteren Knoten gefunden, verschieden von $v_i$, der in $H$ und $K$ liegt. Fertig (siehe vorheriger Fall).

  Angenommen, $v_i$ und $v_j$ sind adjazent.

  Da $v_i$ und $v_j$ wie auch $v$ beliebig gewählt waren, sind dann alle Knoten untereinander benachbart.

# Satz von Brooks (Ende)

* Beweis (Ende):
  - Es bleibt nur noch der Fall, dass $v_i$ der einzige Knoten in $H \cap K$ ist.
    - Wir fassen zusammen: $v_i$ und $v_j$ sind Nachbarn von $v$. Die Kempe-Ketten $H$ und $K$ sind Wege von $v_i$ nach $v_j$ bzw. $v_i$ nach $v_k$. Ihr gemeinsamer Schnitt ist nur der Endknoten $v_i$.
    - Angenommen, $v_i$ und $v_j$ sind nicht adjazent.
      - Sei $w$ ein Knoten mit Farbe $j$ in $H$, adjazent zu $v_i$.
      - In $K$ führen wir eine Kempesche Kettenumfärbung durch. Dadurch ergibt sich eine neue zulässige Färbung von $G$.
      - Danach hat $v_i$ die Farbe $k$ und $v_k$ die Farbe $i$.
      - $w$ hat dann die Farbe $i$ und ist weiterhin in $H$.
      - Da $w$ adjazent zu $v_i$ ist, liegt $w$ auch in $K$ (die Zusammenhangskomponente der Farben $i$ und $k$ ).
      - Also haben wir jetzt einen weiteren Knoten gefunden, verschieden von $v_i$, der in $H$ und $K$ liegt. Fertig (siehe vorheriger Fall).
    - Angenommen, $v_i$ und $v_j$ sind adjazent.
      - Da $v_i$ und $v_j$ wie auch $v$ beliebig gewählt waren, sind dann alle Knoten untereinander benachbart.
      - Dann wäre $G$ der vollständige Graph $K_d$, im Widerspruch zur Annahme.

# Zwei Beispiele

# Zwei Beispiele

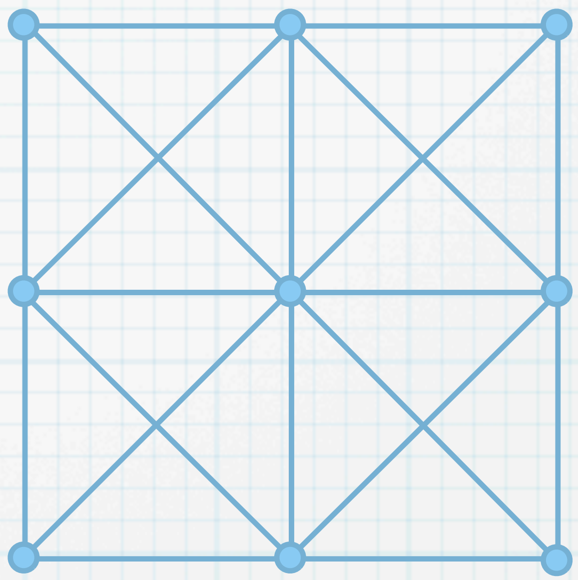
* In Kombination mit Satz 3(d) erhalten wir Abschätzungen für die chromatische Zahl.

# Zwei Beispiele

* In Kombination mit Satz 3(d) erhalten wir Abschätzungen für die chromatische Zahl.
* Beispiele:

# Zwei Beispiele

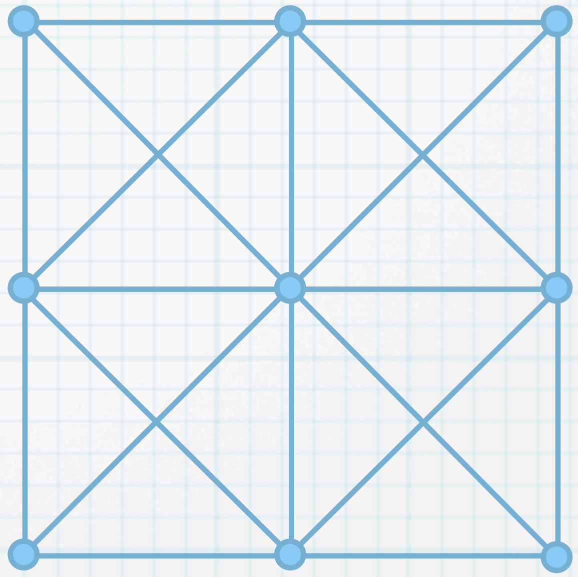
- In Kombination mit Satz 3(d) erhalten wir Abschätzungen für die chromatische Zahl.
- Beispiele:



$G_1$

# Zwei Beispiele

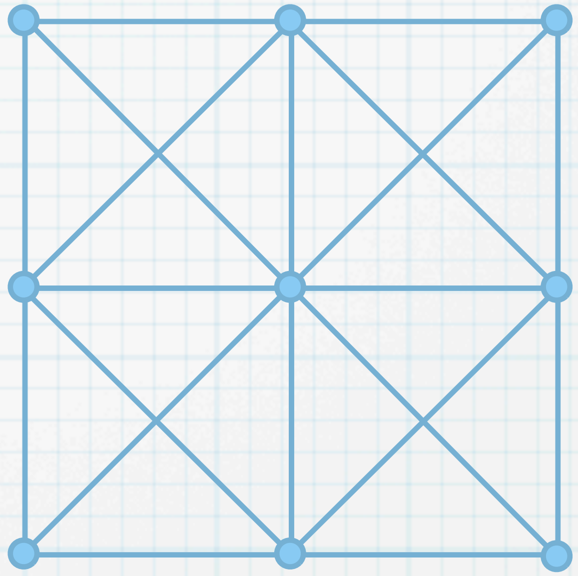
* In Kombination mit Satz 3(d) erhalten wir Abschätzungen für die chromatische Zahl.
* Beispiele:
  * $K_4$ ist Untergraph von $G_1$.



$G_1$

# Zwei Beispiele

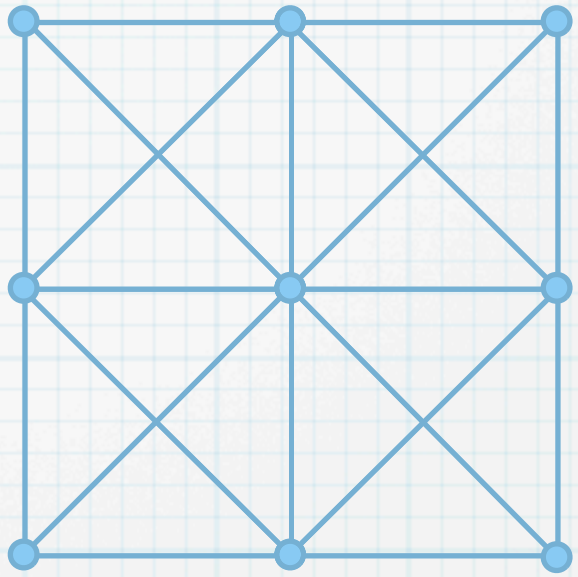
* In Kombination mit Satz 3(d) erhalten wir Abschätzungen für die chromatische Zahl.
* Beispiele:
    * $K_4$ ist Untergraph von $G_1$.
      $\Delta(G_1) = 8$.



$G_1$

# Zwei Beispiele

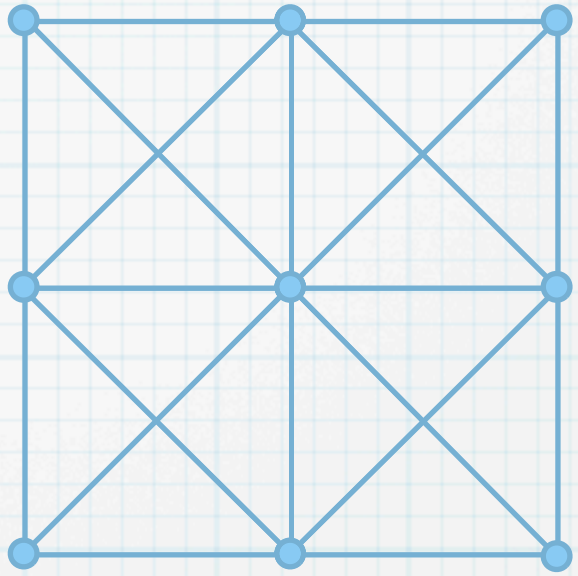
* In Kombination mit Satz 3(d) erhalten wir Abschätzungen für die chromatische Zahl.
* Beispiele:
  * $K_4$ ist Untergraph von $G_1$.
    $\Delta(G_1) = 8$.
    Also ist $4 \leq \chi(G_1) \leq 8$.



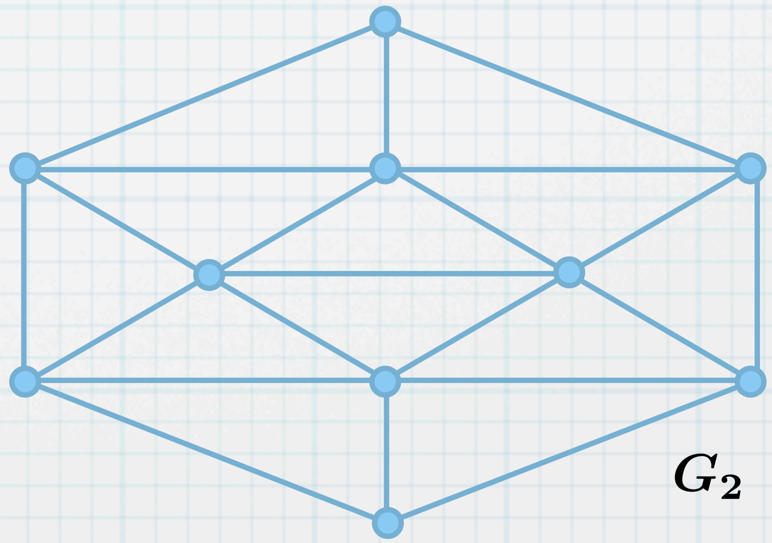
$G_1$

# Zwei Beispiele

* In Kombination mit Satz 3(d) erhalten wir Abschätzungen für die chromatische Zahl.
* Beispiele:
  * $K_4$ ist Untergraph von $G_1$.
    $\Delta(G_1) = 8$.
    Also ist $4 \leq \chi(G_1) \leq 8$.



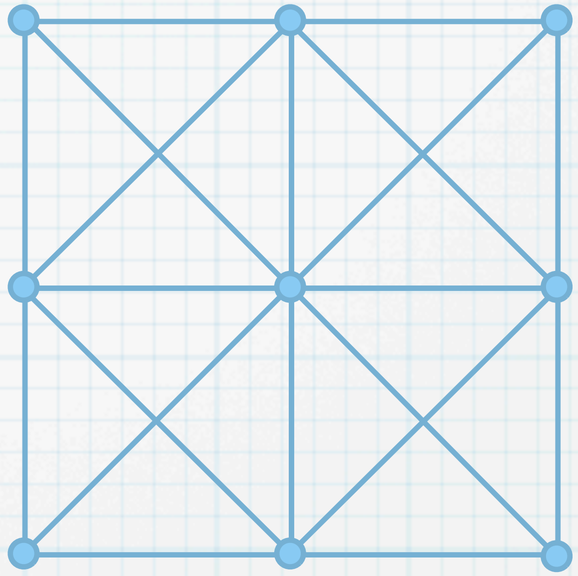
$G_1$



$G_2$

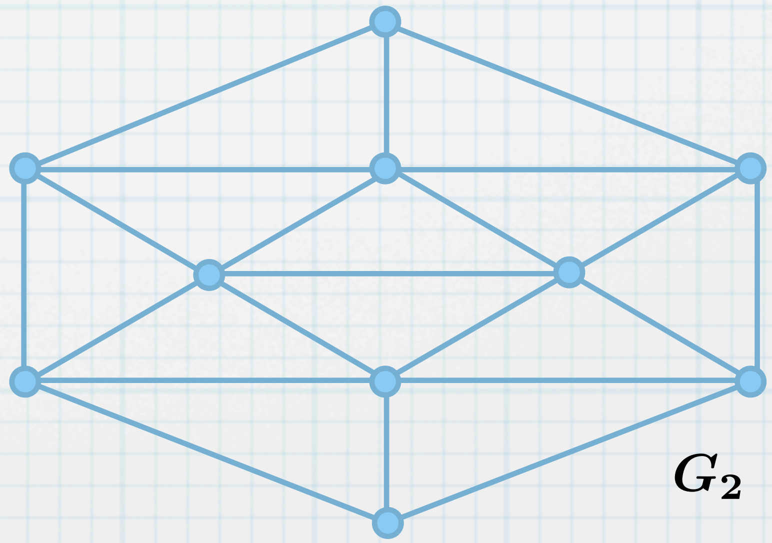
# Zwei Beispiele

* In Kombination mit Satz 3(d) erhalten wir Abschätzungen für die chromatische Zahl.
* Beispiele:
  * $K_4$ ist Untergraph von $G_1$.
    $\Delta(G_1) = 8$.
    Also ist $4 \leq \chi(G_1) \leq 8$.



$G_1$

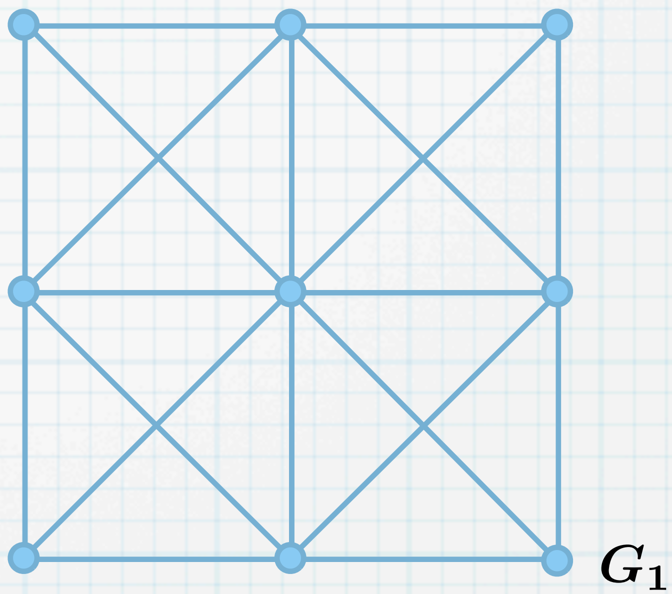
  * „Birkhoffscher Diamant“ $G_2$.



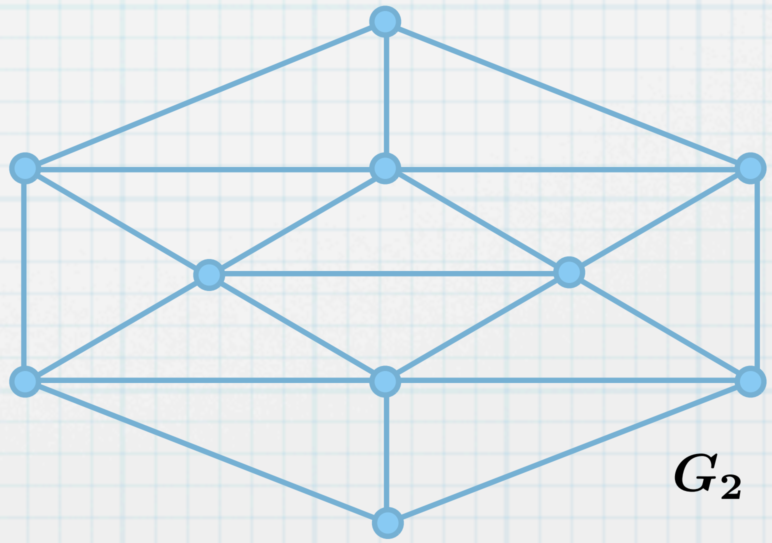
$G_2$

# Zwei Beispiele

* In Kombination mit Satz 3(d) erhalten wir Abschätzungen für die chromatische Zahl.
* Beispiele:
    * $K_4$ ist Untergraph von $G_1$.
      $\Delta(G_1) = 8$.
      Also ist $4 \leq \chi(G_1) \leq 8$.

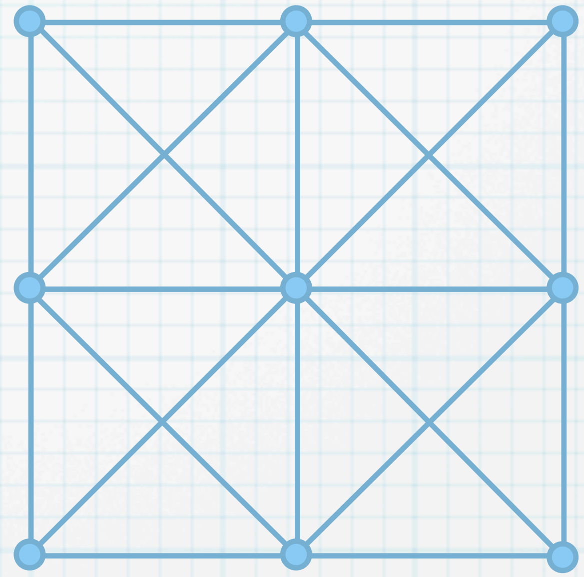



* „Birkhoffscher Diamant“ $G_2$.
  $K_3$ ist Untergraph von $G_2$.



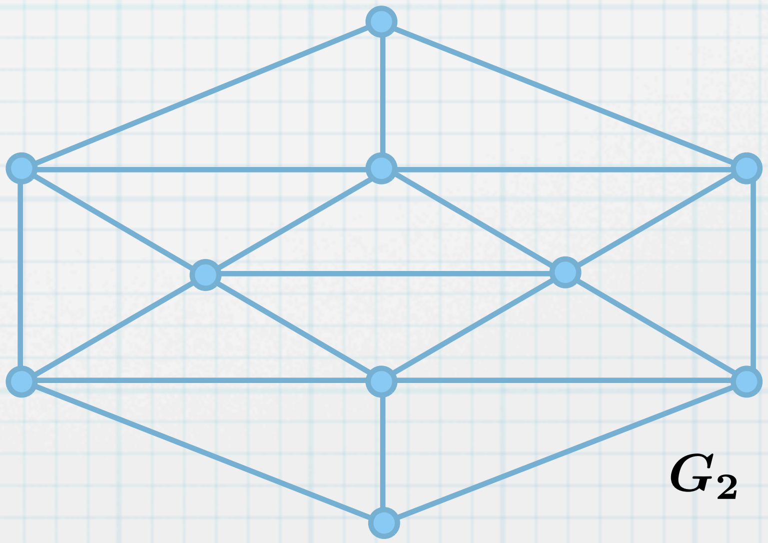
# Zwei Beispiele

- In Kombination mit Satz 3(d) erhalten wir Abschätzungen für die chromatische Zahl.
- Beispiele:
  - $K_4$ ist Untergraph von $G_1$.
    $\Delta(G_1) = 8$.
    Also ist $4 \le \chi(G_1) \le 8$.



$G_1$

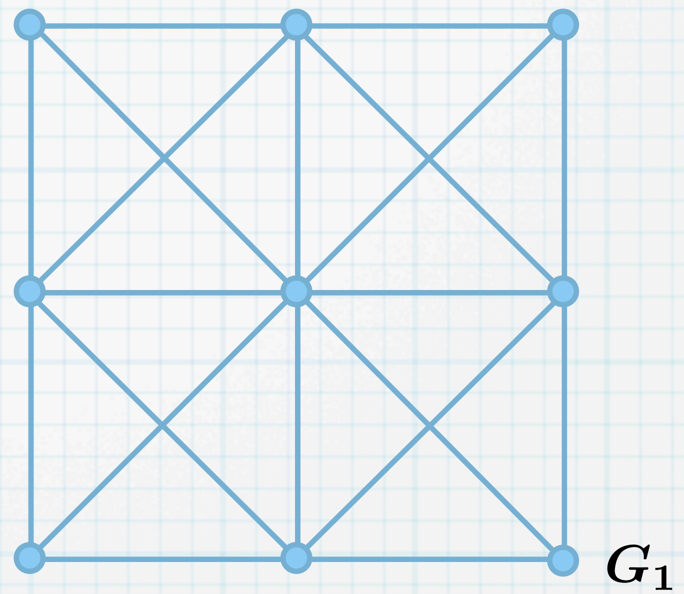
  - „Birkhoffscher Diamant“ $G_2$.
    $K_3$ ist Untergraph von $G_2$.
    $\Delta(G_2) = 5$.



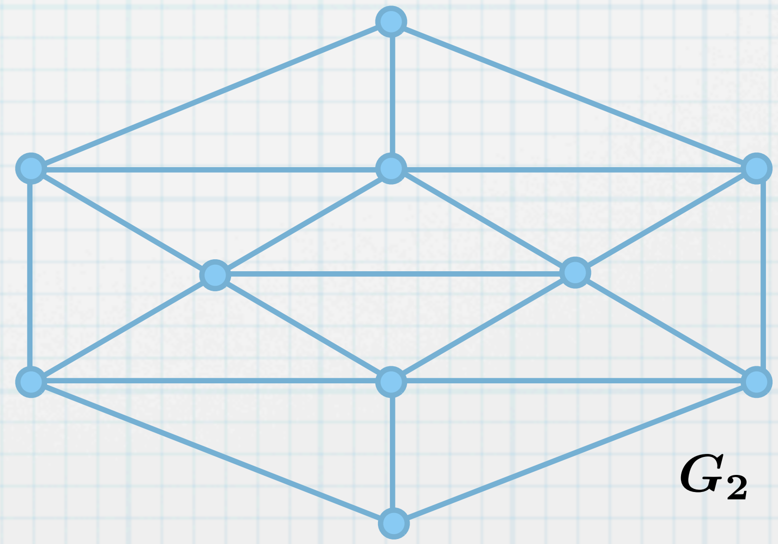
$G_2$

# Zwei Beispiele

* In Kombination mit Satz 3(d) erhalten wir Abschätzungen für die chromatische Zahl.
* Beispiele:
    * $K_4$ ist Untergraph von $G_1$.
      $\Delta(G_1) = 8$.
      Also ist $4 \leq \chi(G_1) \leq 8$.




* „Birkhoffscher Diamant“ $G_2$.
  $K_3$ ist Untergraph von $G_2$.
  $\Delta(G_2) = 5$.
  Also ist $3 \leq \chi(G_2) \leq 5$.



# Ein einfacher sequentieller Färbungsalgorithmus

# Ein einfacher sequentieller Färbungsalgorithmus

* Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$

# Ein einfacher sequentieller Färbungsalgorithmus

* Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
* Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \ldots, n\} =: C$

# Ein einfacher sequentieller Färbungsalgorithmus

* Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
* Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \ldots, n\} =: C$

(1) **algorithm** sequentialColoring

# Ein einfacher sequentieller Färbungsalgorithmus

* Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
* Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \ldots, n\} =: C$

(1) **algorithm** sequentialColoring

(2) $C(x_i) := C$ für alle $x_i \in V$

# Ein einfacher sequentieller Färbungsalgorithmus

* Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
* Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \ldots, n\} =: C$

(1) **algorithm** sequentialColoring
(2) $C(x_i) := C$ für alle $x_i \in V$
(3) **for** $i$ **from** 1 **to** $n$ **do**

# Ein einfacher sequentieller Färbungsalgorithmus

* Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
* Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \ldots, n\} =: C$

(1) **algorithm** sequentialColoring
(2) $C(x_i) := C$ für alle $x_i \in V$
(3) **for** $i$ **from** 1 **to** $n$ **do**
(4) $c := \min C(x_i)$

# Ein einfacher sequentieller Färbungsalgorithmus

* Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
* Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \ldots, n\} =: C$

(1) **algorithm** sequentialColoring
(2) $C(x_i) := C$ für alle $x_i \in V$
(3) **for** $i$ **from** 1 **to** $n$ **do**
(4) $c := \min C(x_i)$
(5) $f(x_i) := c$

# Ein einfacher sequentieller Färbungsalgorithmus

* Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
* Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \ldots, n\} =: C$

(1) **algorithm** sequentialColoring
(2) $C(x_i) := C$ für alle $x_i \in V$
(3) **for** $i$ **from** 1 **to** $n$ **do**
(4) $c := \min C(x_i)$
(5) $f(x_i) := c$
(6) **for** alle Knoten $y$ mit $\{x_i, y\} \in E$ **do**

# Ein einfacher sequentieller Färbungsalgorithmus

* Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
* Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \ldots, n\} =: C$

(1) **algorithm** sequentialColoring
(2) $C(x_i) := C$ für alle $x_i \in V$
(3) **for** $i$ **from** 1 **to** $n$ **do**
(4) $c := \min C(x_i)$
(5) $f(x_i) := c$
(6) **for** alle Knoten $y$ mit $\{x_i, y\} \in E$ **do**
(7) $C(y) := C(y) \setminus \{c\}$

# Ein einfacher sequentieller Färbungsalgorithmus

* Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \dots, x_n\}$
* Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \dots, n\} =: C$

**algorithm** sequentialColoring
  $C(x_i) := C$ für alle $x_i \in V$
  **for** $i$ **from** 1 **to** $n$ **do**
    $c := \min C(x_i)$
    $f(x_i) := c$
    **for** alle Knoten $y$ mit $\{x_i, y\} \in E$ **do**
      $C(y) := C(y) \backslash \{c\}$
    **end for**

# Ein einfacher sequentieller Färbungsalgorithmus

* Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
* Ausgabe: Färbung $f : V \rightarrow \{1, \ldots, n\} =: C$

**algorithm** sequentialColoring<br>
    $C(x_i) := C$ für alle $x_i \in V$<br>
    **for** $i$ **from** 1 **to** $n$ **do**<br>
        $c := \min C(x_i)$<br>
        $f(x_i) := c$<br>
        **for** alle Knoten $y$ mit $\{x_i, y\} \in E$ **do**<br>
            $C(y) := C(y) \setminus \{c\}$<br>
        **end for**<br>
    **end for**

# Ein einfacher sequentieller Färbungsalgorithmus

* Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
* Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \ldots, n\} =: C$

**algorithm** sequentialColoring
    $C(x_i) := C$ für alle $x_i \in V$
    **for** $i$ **from** 1 **to** $n$ **do**
        $c := \min C(x_i)$
        $f(x_i) := c$
        **for** alle Knoten $y$ mit $\{x_i, y\} \in E$ **do**
            $C(y) := C(y) \setminus \{c\}$
        **end for**
    **end for**
**end algorithm**

# Ein einfacher sequentieller Färbungsalgorithmus

* Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
* Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \ldots, n\} =: C$

**algorithm** sequentialColoring
  $C(x_i) := C$ für alle $x_i \in V$
  **for** $i$ **from** 1 **to** $n$ **do**
    $c := \min C(x_i)$
    $f(x_i) := c$
    **for** alle Knoten $y$ mit $\{x_i, y\} \in E$ **do**
      $C(y) := C(y) \setminus \{c\}$
    **end for**
  **end for**
**end algorithm**

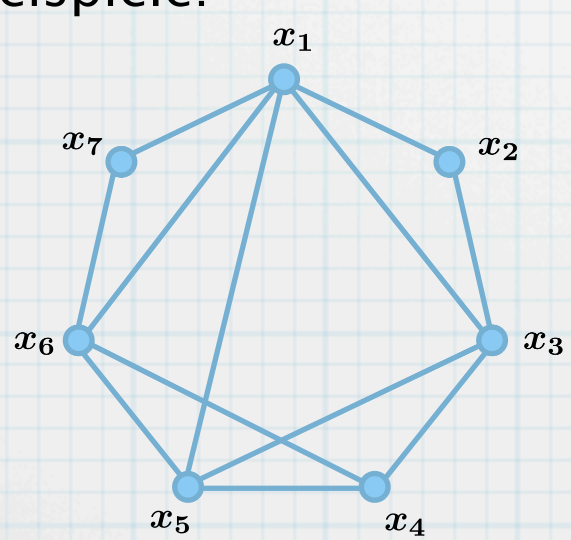
* Beispiele:

# Ein einfacher sequentieller Färbungsalgorithmus

* Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
* Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \ldots, n\} =: C$

**algorithm** sequentialColoring
  $C(x_i) := C$ für alle $x_i \in V$
  **for** $i$ **from** 1 **to** $n$ **do**
    $c := \min C(x_i)$
    $f(x_i) := c$
    **for** alle Knoten $y$ mit $\{x_i, y\} \in E$ **do**
      $C(y) := C(y) \setminus \{c\}$
    **end for**
  **end for**
**end algorithm**

* Beispiele:

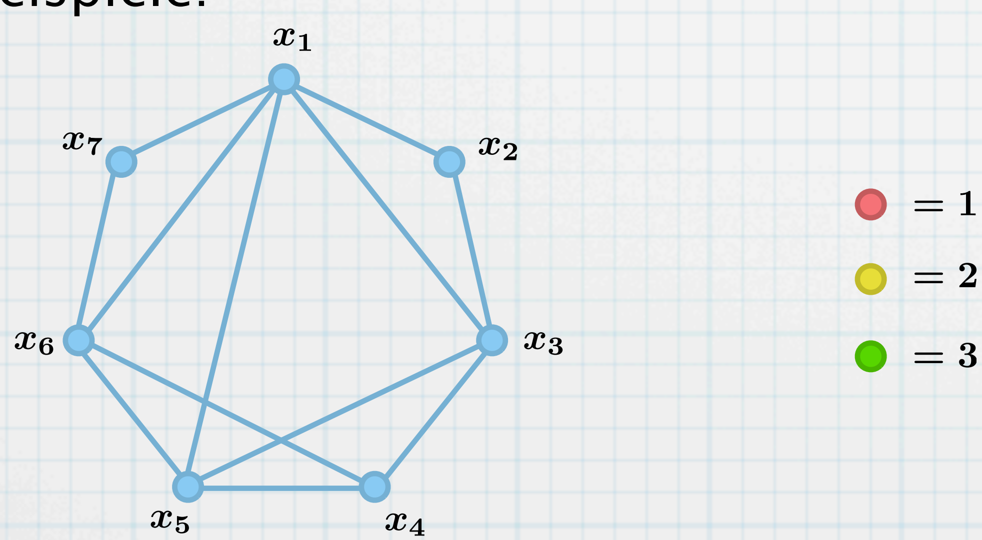


# Ein einfacher sequentieller Färbungsalgorithmus

- Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
- Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \ldots, n\} =: C$

**algorithm** sequentialColoring<br>
  $C(x_i) := C$ für alle $x_i \in V$<br>
  **for** $i$ **from** 1 **to** $n$ **do**<br>
    $c := \min C(x_i)$<br>
    $f(x_i) := c$<br>
    **for** alle Knoten $y$ mit $\{x_i, y\} \in E$ **do**<br>
      $C(y) := C(y) \setminus \{c\}$<br>
    **end for**<br>
  **end for**<br>
**end algorithm**

- Beispiele:

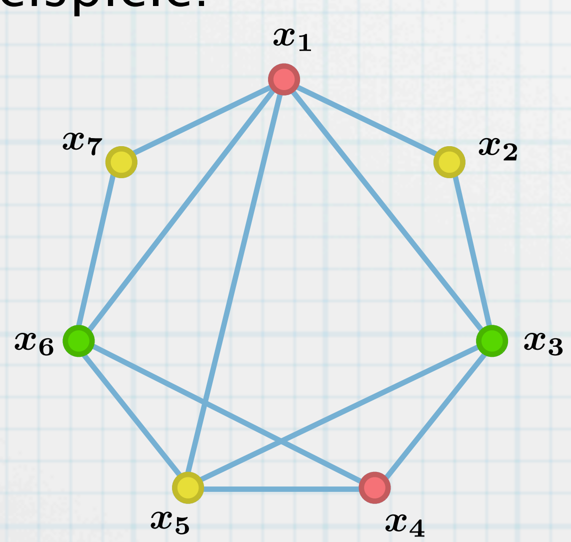


# Ein einfacher sequentieller Färbungsalgorithmus

* Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
* Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \ldots, n\} =: C$

(1) **algorithm** sequentialColoring
(2) $\quad C(x_i) := C$ für alle $x_i \in V$
(3) $\quad$ **for** $i$ **from** 1 **to** $n$ **do**
(4) $\quad\quad c := \min C(x_i)$
(5) $\quad\quad f(x_i) := c$
(6) $\quad\quad$ **for** alle Knoten $y$ mit $\{x_i, y\} \in E$ **do**
(7) $\quad\quad\quad C(y) := C(y) \setminus \{c\}$
(8) $\quad\quad$ **end for**
(9) $\quad$ **end for**
(10) **end algorithm**

* Beispiele:



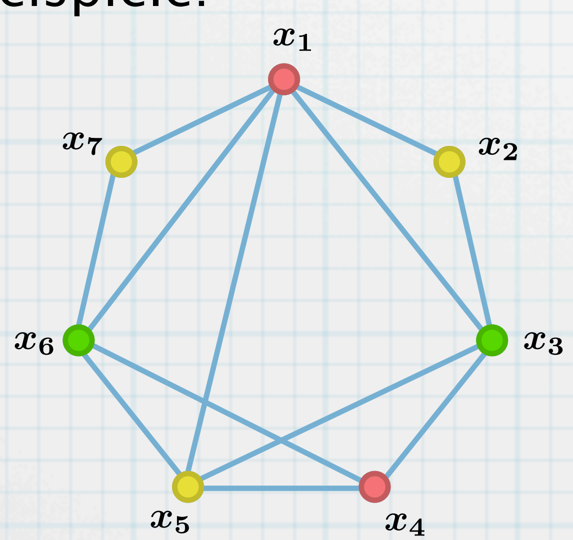

$= 1$
$= 2$
$= 3$

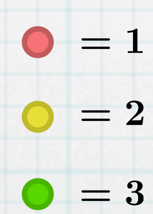
# Ein einfacher sequentieller Färbungsalgorithmus

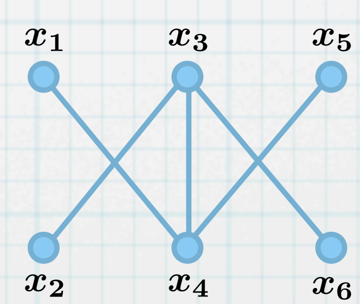
* Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
* Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \ldots, n\} =: C$

**algorithm** sequentialColoring
  $C(x_i) := C$ für alle $x_i \in V$
  **for** $i$ **from** 1 **to** $n$ **do**
    $c := \min C(x_i)$
    $f(x_i) := c$
    **for** alle Knoten $y$ mit $\{x_i, y\} \in E$ **do**
      $C(y) := C(y) \setminus \{c\}$
    **end for**
  **end for**
**end algorithm**

* Beispiele:



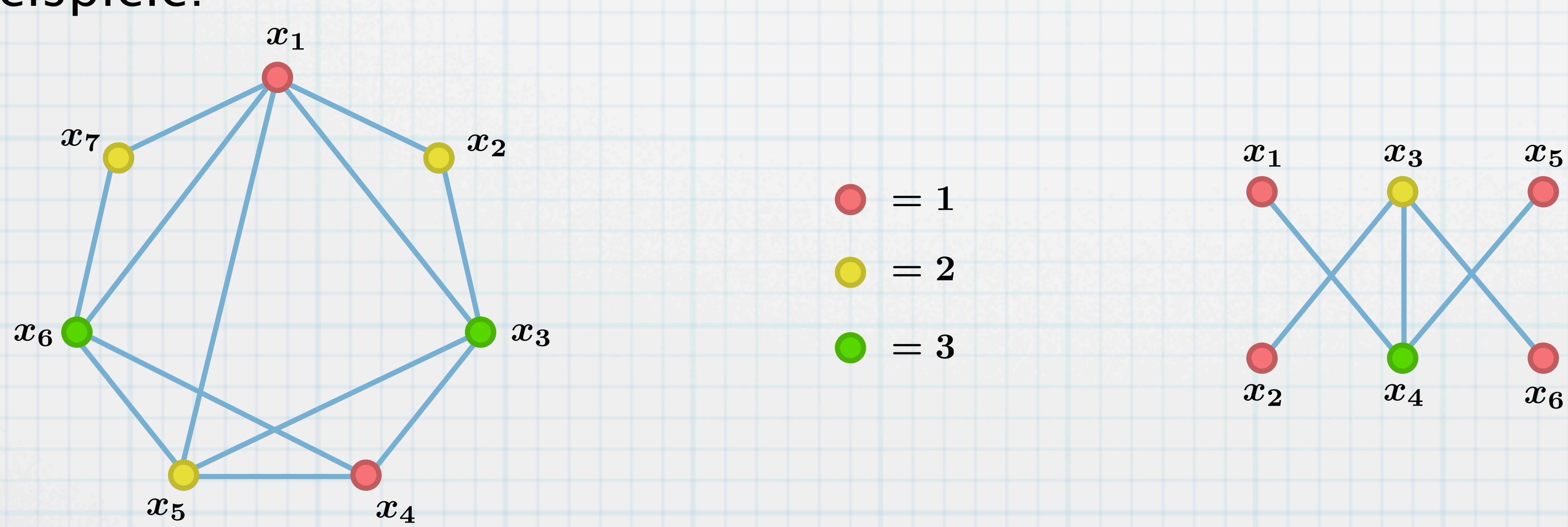



# Ein einfacher sequentieller Färbungsalgorithmus

- Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
- Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \ldots, n\} =: C$

**algorithm** sequentialColoring<br>
    $C(x_i) := C$ für alle $x_i \in V$<br>
    **for** $i$ **from** 1 **to** $n$ **do**<br>
        $c := \min C(x_i)$<br>
        $f(x_i) := c$<br>
        **for** alle Knoten $y$ mit $\{x_i, y\} \in E$ **do**<br>
            $C(y) := C(y) \setminus \{c\}$<br>
        **end for**<br>
    **end for**<br>
**end algorithm**

- Beispiele:



# Der Algorithmus von Welsh und Powell (1967)

# Der Algorithmus von Welsh und Powell (1967)

* Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$

# Der Algorithmus von Welsh und Powell (1967)

* Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
* Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \ldots, n\} =: C$

# Der Algorithmus von Welsh und Powell (1967)

* Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
* Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \ldots, n\} =: C$

(1) **algorithm** welshPowell

# Der Algorithmus von Welsh und Powell (1967)

* Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
* Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \ldots, n\} =: C$

(1) **algorithm** welshPowell
(2)   sortiere $V$ so, dass $\deg(x_1) \geq \ldots \geq \deg(x_n)$

# Der Algorithmus von Welsh und Powell (1967)

- Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
- Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \ldots, n\} =: C$

(1) **algorithm** welshPowell
(2) sortiere $V$ so, dass $\deg(x_1) \geq \ldots \geq \deg(x_n)$
(3) sequentialColoring($G$)

# Der Algorithmus von Welsh und Powell (1967)

* Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
* Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \ldots, n\} =: C$

(1) **algorithm** welshPowell
(2) sortiere $V$ so, dass $\deg(x_1) \geq \ldots \geq \deg(x_n)$
(3) sequentialColoring($G$)
(4) **end algorithm**

# Der Algorithmus von Welsh und Powell (1967)

* Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \dots, x_n\}$
* Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \dots, n\} =: C$

(1) **algorithm** welshPowell
(2) sortiere $V$ so, dass $\deg(x_1) \geq \dots \geq \deg(x_n)$
(3) sequentialColoring($G$)
(4) **end algorithm**

* Bemerkung: Der Algorithmus von Welsh-Powell liefert eine Färbung mit höchstens $\Delta(G) + 1$ Farben (siehe Beweis von Satz 5).

# Der Algorithmus von Welsh und Powell (1967)

* Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
* Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \ldots, n\} =: C$

(1) **algorithm** welshPowell
(2) sortiere $V$ so, dass $\deg(x_1) \geq \ldots \geq \deg(x_n)$
(3) sequentialColoring($G$)
(4) **end algorithm**

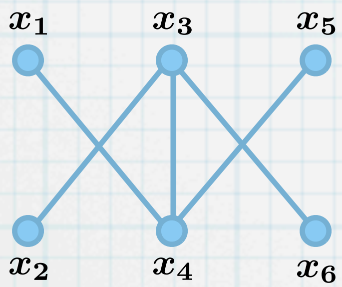
* Bemerkung: Der Algorithmus von Welsh-Powell liefert eine Färbung mit höchstens $\Delta(G) + 1$ Farben (siehe Beweis von Satz 5).
* Beispiel:

# Der Algorithmus von Welsh und Powell (1967)

* Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
* Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \ldots, n\} =: C$

(1) **algorithm** welshPowell
(2) sortiere $V$ so, dass $\deg(x_1) \geq \ldots \geq \deg(x_n)$
(3) sequentialColoring($G$)
(4) **end algorithm**

* Bemerkung: Der Algorithmus von Welsh-Powell liefert eine Färbung mit höchstens $\Delta(G) + 1$ Farben (siehe Beweis von Satz 5).
* Beispiel:

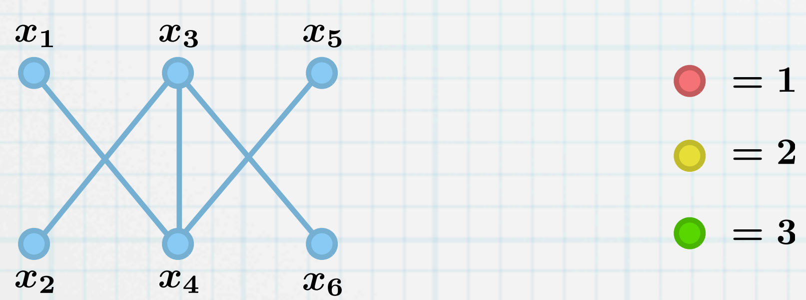


# Der Algorithmus von Welsh und Powell (1967)

- Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
- Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \ldots, n\} =: C$

```
algorithm welshPowell
   sortiere V so, dass deg(x_1) ≥ … ≥ deg(x_n)
   sequentialColoring(G)
end algorithm
```

- Bemerkung: Der Algorithmus von Welsh-Powell liefert eine Färbung mit höchstens $\Delta(G) + 1$ Farben (siehe Beweis von Satz 5).
- Beispiel:

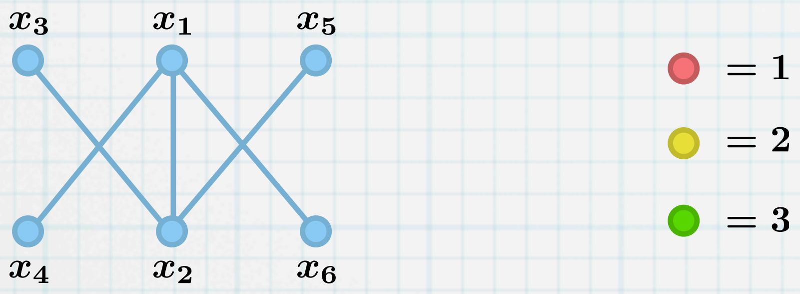


# Der Algorithmus von Welsh und Powell (1967)

* Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
* Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \ldots, n\} =: C$

(1) **algorithm** welshPowell
(2) sortiere $V$ so, dass $\deg(x_1) \geq \ldots \geq \deg(x_n)$
(3) sequentialColoring($G$)
(4) **end algorithm**

* Bemerkung: Der Algorithmus von Welsh-Powell liefert eine Färbung mit höchstens $\Delta(G) + 1$ Farben (siehe Beweis von Satz 5).
* Beispiel:

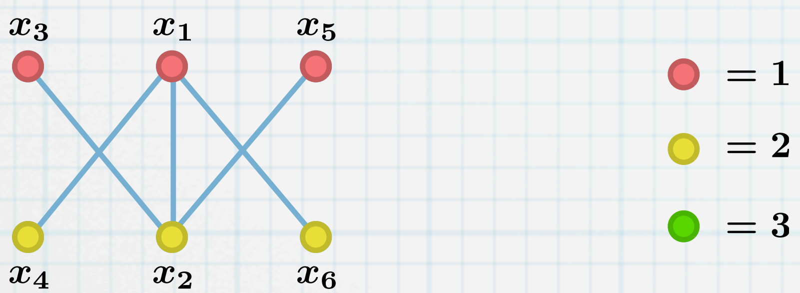


# Der Algorithmus von Welsh und Powell (1967)

* Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \dots, x_n\}$
* Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \dots, n\} =: C$

(1) **algorithm** welshPowell
(2) sortiere $V$ so, dass $\deg(x_1) \geq \dots \geq \deg(x_n)$
(3) sequentialColoring($G$)
(4) **end algorithm**

* Bemerkung: Der Algorithmus von Welsh-Powell liefert eine Färbung mit höchstens $\Delta(G) + 1$ Farben (siehe Beweis von Satz 5).
* Beispiel:



# Der Algorithmus von Matula, Marble und Isaacson (1972)

# Der Algorithmus von Matula, Marble und Isaacson (1972)

* Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$

# Der Algorithmus von Matula, Marble und Isaacson (1972)

* Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
* Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \ldots, n\} =: C$

# Der Algorithmus von Matula, Marble und Isaacson (1972)

* Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
* Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \ldots, n\} =: C$

(1) **algorithm** matulaMarbleIsaacson

# Der Algorithmus von Matula, Marble und Isaacson (1972)

* Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
* Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \ldots, n\} =: C$

(1) **algorithm** matulaMarbleIsaacson

(2) $\quad v_n := \arg\min\{\deg(x_i) : 1 \leq i \leq n\}$

# Der Algorithmus von Matula, Marble und Isaacson (1972)

* Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
* Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \ldots, n\} =: C$

(1) **algorithm** matulaMarbleIsaacson
(2) $\quad v_n := \arg\min\{\deg(x_i) : 1 \leq i \leq n\}$
(3) $\quad$ **for** $i$ **from** $n-1$ **downto** 1 **step** -1 **do**

# Der Algorithmus von Matula, Marble und Isaacson (1972)

* Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
* Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \ldots, n\} =: C$

(1) **algorithm** matulaMarbleIsaacson
(2) $v_n := \arg\min\{\deg(x_i) : 1 \leq i \leq n\}$
(3) **for** $i$ **from** $n-1$ **downto** 1 **step** -1 **do**
(4) $H := G - \{v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{i+1}\}$

# Der Algorithmus von Matula, Marble und Isaacson (1972)

* Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
* Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \ldots, n\} =: C$

(1) **algorithm** matulaMarbleIsaacson

(2) $v_n := \arg\min\{\deg(x_i) : 1 \leq i \leq n\}$

(3) **for** $i$ **from** $n - 1$ **downto** 1 **step** -1 **do**

(4) $H := G - \{v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{i+1}\}$

(5) $v_i := \arg\min\{\deg_H(v) : v \in V(H)\}$

# Der Algorithmus von Matula, Marble und Isaacson (1972)

- Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \dots, x_n\}$
- Ausgabe: Färbung $f : V \rightarrow \{1, \dots, n\} =: C$

**algorithm** matulaMarbleIsaacson<br>
  $v_n := \arg\min\{\deg(x_i) : 1 \leq i \leq n\}$<br>
  **for** $i$ **from** $n-1$ **downto** 1 **step** -1 **do**<br>
    $H := G - \{v_n, v_{n-1}, \dots, v_{i+1}\}$<br>
    $v_i := \arg\min\{\deg_H(v) : v \in V(H)\}$<br>
  **end for**

# Der Algorithmus von Matula, Marble und Isaacson (1972)

- Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
- Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \ldots, n\} =: C$

(1) **algorithm** matulaMarbleIsaacson
(2) $v_n := \arg\min\{\deg(x_i) : 1 \leq i \leq n\}$
(3) **for** $i$ **from** $n - 1$ **downto** 1 **step** -1 **do**
(4) $H := G - \{v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{i+1}\}$
(5) $v_i := \arg\min\{\deg_H(v) : v \in V(H)\}$
(6) **end for**
(7) sortiere $V$ entsprechend $v_1, \ldots, v_n$

# Der Algorithmus von Matula, Marble und Isaacson (1972)

* Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
* Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \ldots, n\} =: C$

```
algorithm matulaMarbleIsaacson
  v_n := arg min{deg(x_i) : 1 ≤ i ≤ n}
  for i from n − 1 downto 1 step -1 do
    H := G − {v_n, v_{n−1}, ..., v_{i+1}}
    v_i := arg min{deg_H(v) : v ∈ V(H)}
  end for
  sortiere V entsprechend v_1, ..., v_n
  sequentialColoring(G)
```

# Der Algorithmus von Matula, Marble und Isaacson (1972)

* Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
* Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \ldots, n\} =: C$

**algorithm** matulaMarbleIsaacson
    $v_n := \arg\min\{\deg(x_i) : 1 \leq i \leq n\}$
    **for** $i$ **from** $n-1$ **downto** 1 **step** -1 **do**
        $H := G - \{v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{i+1}\}$
        $v_i := \arg\min\{\deg_H(v) : v \in V(H)\}$
    **end for**
    sortiere $V$ entsprechend $v_1, \ldots, v_n$
    sequentialColoring($G$)
**end algorithm**

# Der Algorithmus von Matula, Marble und Isaacson (1972)

* Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
* Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \ldots, n\} =: C$

(1) **algorithm** matulaMarbleIsaacson
(2) $v_n := \arg\min\{\deg(x_i) : 1 \leq i \leq n\}$
(3) **for** $i$ **from** $n-1$ **downto** 1 **step** -1 **do**
(4) $H := G - \{v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{i+1}\}$
(5) $v_i := \arg\min\{\deg_H(v) : v \in V(H)\}$
(6) **end for**
(7) sortiere $V$ entsprechend $v_1, \ldots, v_n$
(8) sequentialColoring($G$)
(9) **end algorithm**

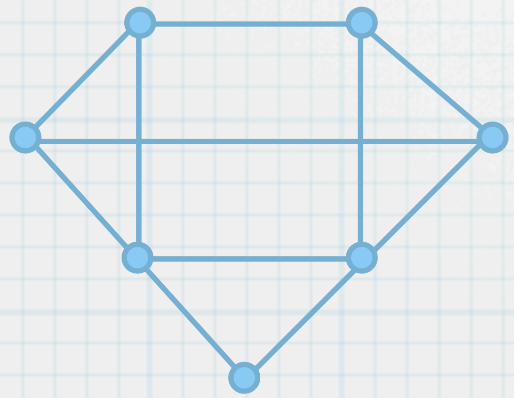
* Beispiel:

# Der Algorithmus von Matula, Marble und Isaacson (1972)

* Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
* Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \ldots, n\} =: C$

(1) **algorithm** matulaMarbleIsaacson
(2) $\quad v_n := \arg\min\{\deg(x_i) : 1 \leq i \leq n\}$
(3) $\quad$ **for** $i$ **from** $n-1$ **downto** 1 **step** -1 **do**
(4) $\quad\quad H := G - \{v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{i+1}\}$
(5) $\quad\quad v_i := \arg\min\{\deg_H(v) : v \in V(H)\}$
(6) $\quad$ **end for**
(7) $\quad$ sortiere $V$ entsprechend $v_1, \ldots, v_n$
(8) $\quad$ sequentialColoring($G$)
(9) **end algorithm**

* Beispiel:

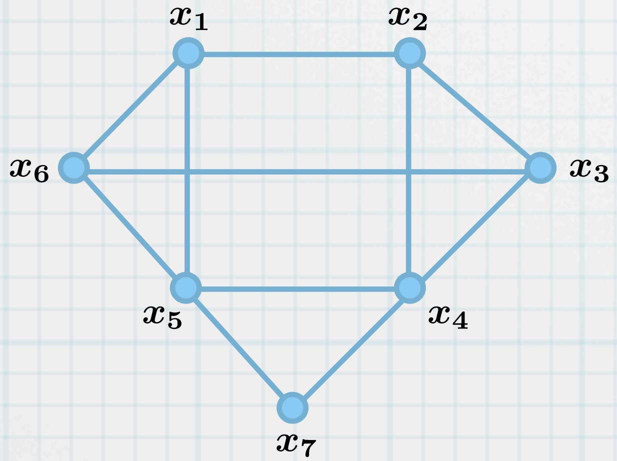


# Der Algorithmus von Matula, Marble und Isaacson (1972)

- Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
- Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \ldots, n\} =: C$

(1) **algorithm** matulaMarbleIsaacson
(2) $v_n := \arg\min\{\deg(x_i) : 1 \leq i \leq n\}$
(3) **for** $i$ **from** $n-1$ **downto** 1 **step** -1 **do**
(4) $H := G - \{v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{i+1}\}$
(5) $v_i := \arg\min\{\deg_H(v) : v \in V(H)\}$
(6) **end for**
(7) sortiere $V$ entsprechend $v_1, \ldots, v_n$
(8) sequentialColoring($G$)
(9) **end algorithm**

- Beispiel:

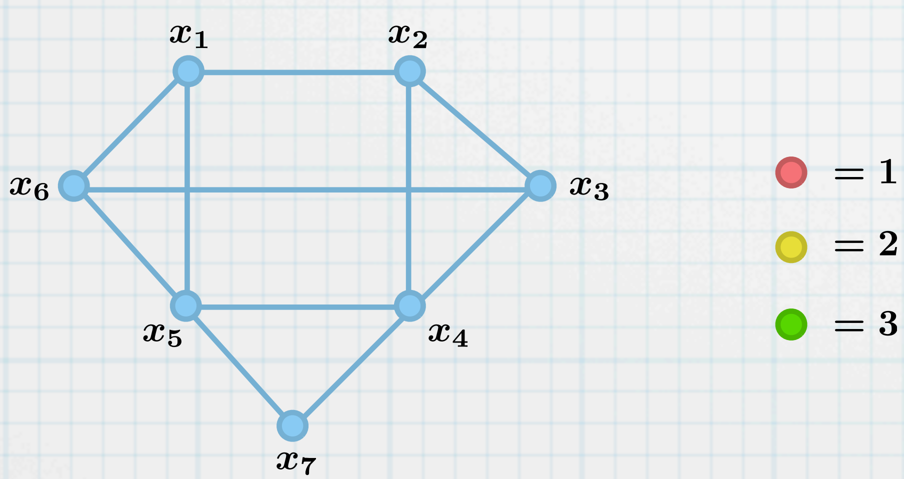


# Der Algorithmus von Matula, Marble und Isaacson (1972)

* Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \ldots, x_n\}$
* Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \ldots, n\} =: C$

**algorithm** matulaMarbleIsaacson
  $v_n := \arg\min\{\deg(x_i) : 1 \leq i \leq n\}$
  **for** $i$ **from** $n - 1$ **downto** 1 **step** -1 **do**
    $H := G - \{v_n, v_{n-1}, \ldots, v_{i+1}\}$
    $v_i := \arg\min\{\deg_H(v) : v \in V(H)\}$
  **end for**
  sortiere $V$ entsprechend $v_1, \ldots, v_n$
  sequentialColoring($G$)
**end algorithm**

* Beispiel:

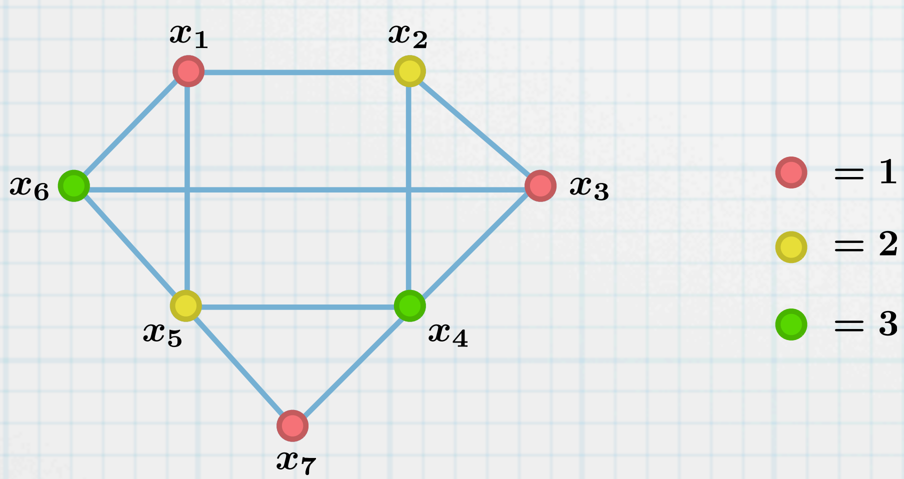


# Der Algorithmus von Matula, Marble und Isaacson (1972)

* Eingabe: Graph $G = (V, E), V = \{x_1, \dots, x_n\}$
* Ausgabe: Färbung $f : V \to \{1, \dots, n\} =: C$

(1) **algorithm** matulaMarbleIsaacson
(2) $\quad v_n := \arg\min\{\deg(x_i) : 1 \leq i \leq n\}$
(3) $\quad$ **for** $i$ **from** $n-1$ **downto** 1 **step** -1 **do**
(4) $\quad\quad H := G - \{v_n, v_{n-1}, \dots, v_{i+1}\}$
(5) $\quad\quad v_i := \arg\min\{\deg_H(v) : v \in V(H)\}$
(6) $\quad$ **end for**
(7) $\quad$ sortiere $V$ entsprechend $v_1, \dots, v_n$
(8) $\quad$ sequentialColoring($G$)
(9) **end algorithm**

* Beispiel:



# Kritische Graphen

# Kritische Graphen

* **Definition 9**:
  Ein Graph $G$ heißt $k$–kritisch (genau: $k$–knotenkritisch), wenn $\chi(G) = k$ und $\chi(G - v) < k$ für alle Knoten $v$ von $G$.

# Kritische Graphen

* **Definition 9**:
  Ein Graph $G$ heißt $k$–kritisch (genau: $k$–knotenkritisch), wenn $\chi(G) = k$ und $\chi(G - v) < k$ für alle Knoten $v$ von $G$.
* Beispiele:

# Kritische Graphen

* **Definition 9**:
  Ein Graph $G$ heißt $k$–kritisch (genau: $k$–knotenkritisch), wenn $\chi(G) = k$ und $\chi(G - v) < k$ für alle Knoten $v$ von $G$.
* Beispiele:
  * $K_1$ ist der einzige 1–kritische Graph.

# Kritische Graphen

* **Definition 9**:
  Ein Graph $G$ heißt $k$-kritisch (genau: $k$-knotenkritisch), wenn $\chi(G) = k$ und $\chi(G - v) < k$ für alle Knoten $v$ von $G$.
* Beispiele:
  * $K_1$ ist der einzige 1-kritische Graph.
  * Ein 2-kritischer Graph $G$ ist bipartit (Übung), und für jeden Knoten $v$ ist $G - v$ 1-färbbar.

# Kritische Graphen

* **Definition 9**:
  Ein Graph $G$ heißt $k$-kritisch (genau: $k$-knotenkritisch), wenn $\chi(G) = k$ und $\chi(G - v) < k$ für alle Knoten $v$ von $G$.
* Beispiele:
  * $K_1$ ist der einzige 1-kritische Graph.
  * Ein 2-kritischer Graph $G$ ist bipartit (Übung), und für jeden Knoten $v$ ist $G - v$ 1-färbbar.
    Also ist $K_2$ der einzige 2-kritische Graph.

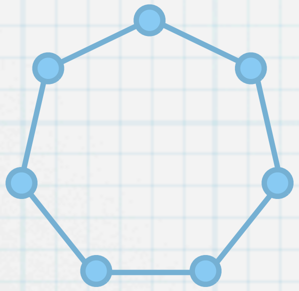
# Kritische Graphen

* **Definition 9**:
  Ein Graph $G$ heißt $k$-kritisch (genau: $k$-knotenkritisch), wenn $\chi(G) = k$ und $\chi(G - v) < k$ für alle Knoten $v$ von $G$.
* Beispiele:
  * $K_1$ ist der einzige 1-kritische Graph.
  * Ein 2-kritischer Graph $G$ ist bipartit (Übung), und für jeden Knoten $v$ ist $G - v$ 1-färbbar.
    Also ist $K_2$ der einzige 2-kritische Graph.
  * Ein Zyklus ungerader Länge ist 3-kritisch.

# Kritische Graphen

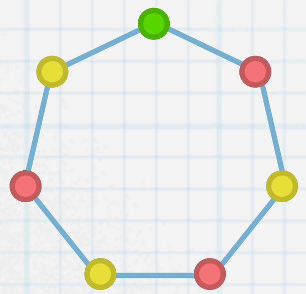
- **Definition 9**:
  Ein Graph $G$ heißt $k$–kritisch (genau: $k$–knotenkritisch), wenn $\chi(G) = k$ und $\chi(G - v) < k$ für alle Knoten $v$ von $G$.
- Beispiele:
  - $K_1$ ist der einzige 1–kritische Graph.
  - Ein 2–kritischer Graph $G$ ist bipartit (Übung), und für jeden Knoten $v$ ist $G - v$ 1–färbbar.

    Also ist $K_2$ der einzige 2–kritische Graph.
  - Ein Zyklus ungerader Länge ist 3–kritisch.



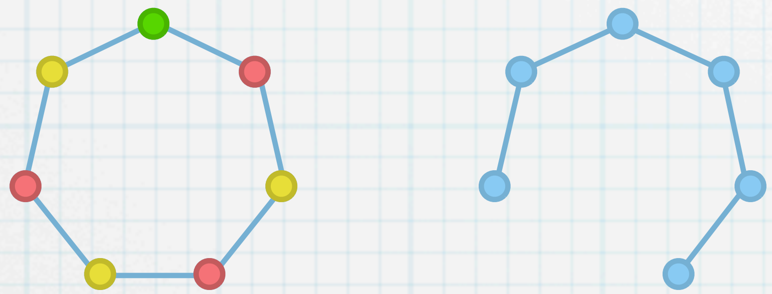
# Kritische Graphen

* **Definition 9**:
  Ein Graph $G$ heißt $k$–kritisch (genau: $k$–knotenkritisch), wenn $\chi(G) = k$ und $\chi(G - v) < k$ für alle Knoten $v$ von $G$.
* Beispiele:
  * $K_1$ ist der einzige 1–kritische Graph.
  * Ein 2–kritischer Graph $G$ ist bipartit (Übung), und für jeden Knoten $v$ ist $G - v$ 1–färbbar.
    Also ist $K_2$ der einzige 2–kritische Graph.
  * Ein Zyklus ungerader Länge ist 3–kritisch.



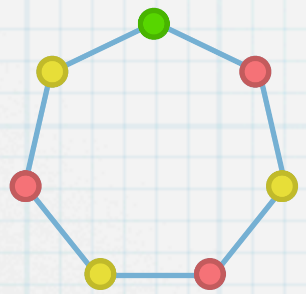
# Kritische Graphen

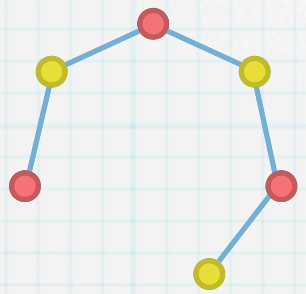
* **Definition 9**:
  Ein Graph $G$ heißt $k$–kritisch (genau: $k$–knotenkritisch), wenn $\chi(G) = k$ und $\chi(G - v) < k$ für alle Knoten $v$ von $G$.
* Beispiele:
  * $K_1$ ist der einzige 1–kritische Graph.
  * Ein 2–kritischer Graph $G$ ist bipartit (Übung), und für jeden Knoten $v$ ist $G - v$ 1–färbbar.
    Also ist $K_2$ der einzige 2–kritische Graph.
  * Ein Zyklus ungerader Länge ist 3–kritisch.



# Kritische Graphen

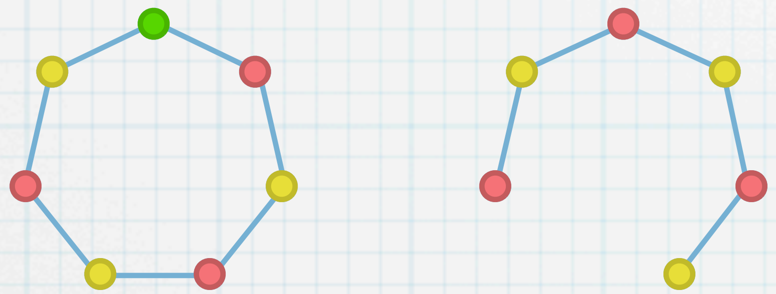
* **Definition 9**:
  Ein Graph $G$ heißt $k$–kritisch (genau: $k$–knotenkritisch), wenn $\chi(G) = k$ und $\chi(G - v) < k$ für alle Knoten $v$ von $G$.
* Beispiele:
  * $K_1$ ist der einzige 1–kritische Graph.
  * Ein 2–kritischer Graph $G$ ist bipartit (Übung), und für jeden Knoten $v$ ist $G - v$ 1–färbbar.
    Also ist $K_2$ der einzige 2–kritische Graph.
  * Ein Zyklus ungerader Länge ist 3–kritisch.





# Kritische Graphen

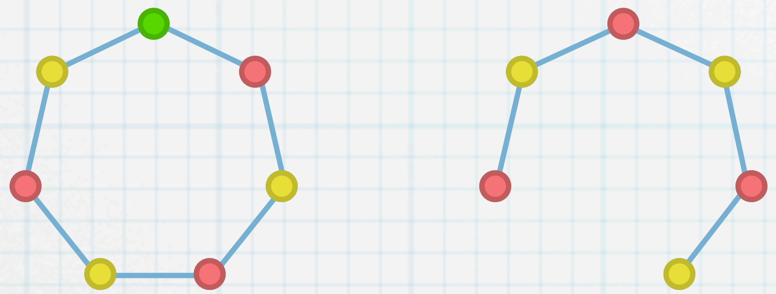
- **Definition 9**:
  Ein Graph $G$ heißt $k$–kritisch (genau: $k$–knotenkritisch), wenn $\chi(G) = k$ und $\chi(G - v) < k$ für alle Knoten $v$ von $G$.
- Beispiele:
  - $K_1$ ist der einzige 1–kritische Graph.
  - Ein 2–kritischer Graph $G$ ist bipartit (Übung), und für jeden Knoten $v$ ist $G - v$ 1–färbbar. Also ist $K_2$ der einzige 2–kritische Graph.
  - Ein Zyklus ungerader Länge ist 3–kritisch.



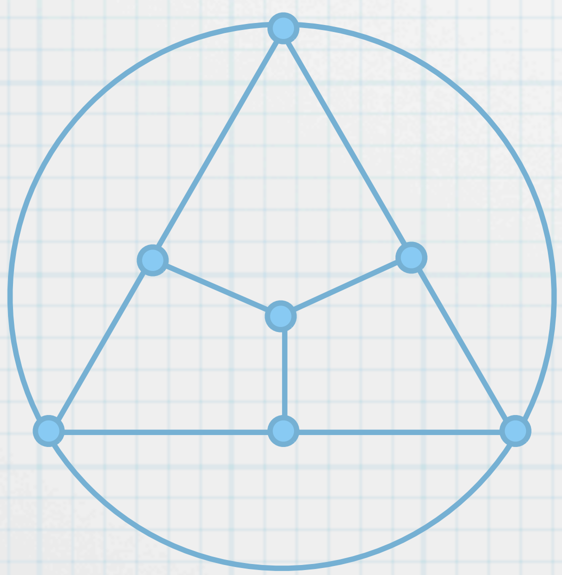
  - Der folgende Graph ist 4–kritisch:

# Kritische Graphen

* **Definition 9**:
  Ein Graph $G$ heißt $k$–kritisch (genau: $k$–knotenkritisch), wenn $\chi(G) = k$ und $\chi(G - v) < k$ für alle Knoten $v$ von $G$.
* Beispiele:
  * $K_1$ ist der einzige 1–kritische Graph.
  * Ein 2–kritischer Graph $G$ ist bipartit (Übung), und für jeden Knoten $v$ ist $G - v$ 1–färbbar.
    Also ist $K_2$ der einzige 2–kritische Graph.
  * Ein Zyklus ungerader Länge ist 3–kritisch.

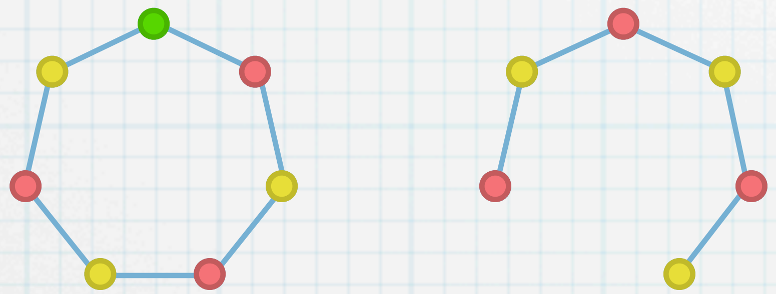


  * Der folgende Graph ist 4–kritisch:

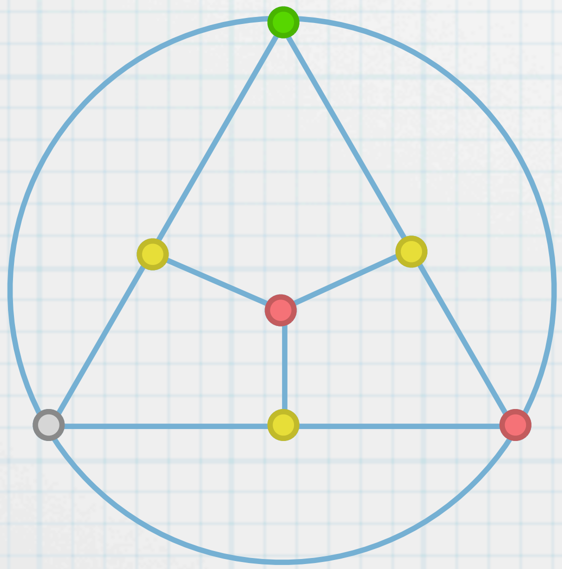


# Kritische Graphen

- **Definition 9**:
  Ein Graph $G$ heißt $k$–kritisch (genau: $k$–knotenkritisch), wenn $\chi(G) = k$ und $\chi(G - v) < k$ für alle Knoten $v$ von $G$.
- Beispiele:
  - $K_1$ ist der einzige 1–kritische Graph.
  - Ein 2–kritischer Graph $G$ ist bipartit (Übung), und für jeden Knoten $v$ ist $G - v$ 1–färbbar.
    Also ist $K_2$ der einzige 2–kritische Graph.
  - Ein Zyklus ungerader Länge ist 3–kritisch.

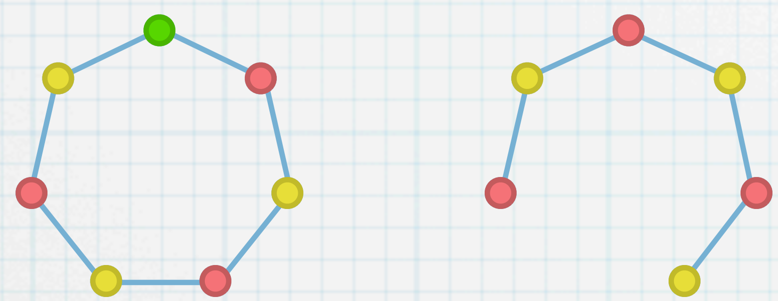


  - Der folgende Graph ist 4–kritisch:

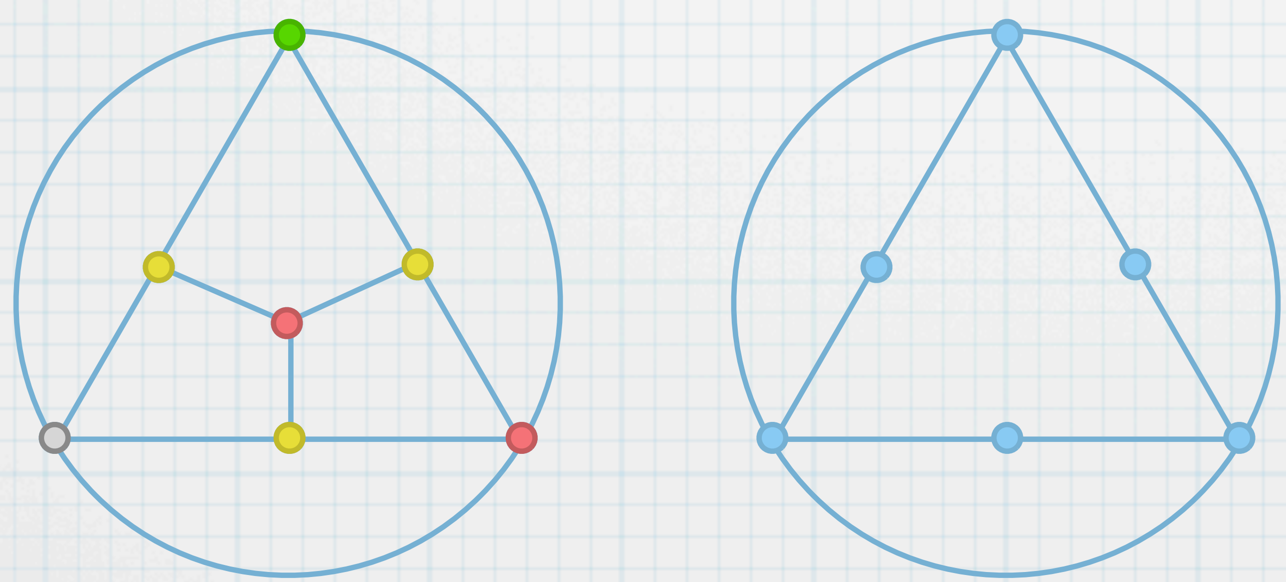


# Kritische Graphen

* **Definition 9**:
  Ein Graph $G$ heißt $k$-kritisch (genau: $k$-knotenkritisch), wenn $\chi(G) = k$ und $\chi(G - v) < k$ für alle Knoten $v$ von $G$.
* Beispiele:
  * $K_1$ ist der einzige 1-kritische Graph.
  * Ein 2-kritischer Graph $G$ ist bipartit (Übung), und für jeden Knoten $v$ ist $G - v$ 1-färbbar.
    Also ist $K_2$ der einzige 2-kritische Graph.
  * Ein Zyklus ungerader Länge ist 3-kritisch.

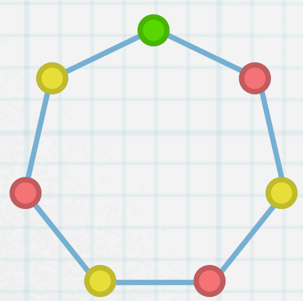
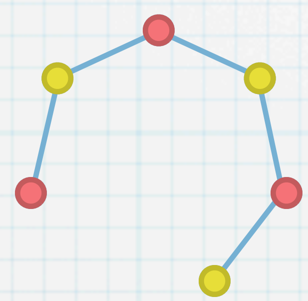


  * Der folgende Graph ist 4-kritisch:

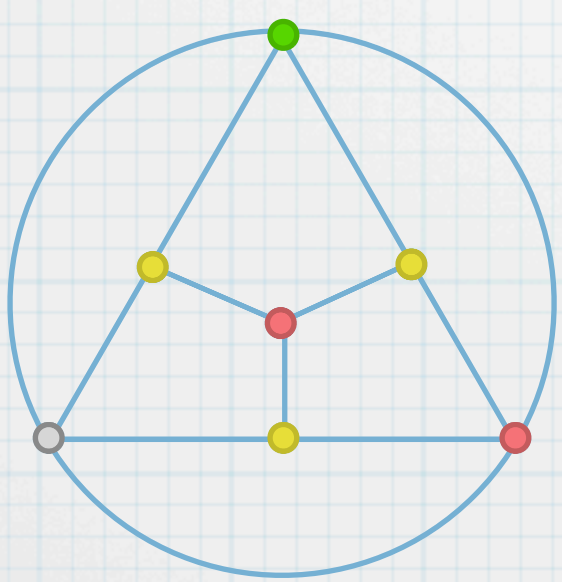
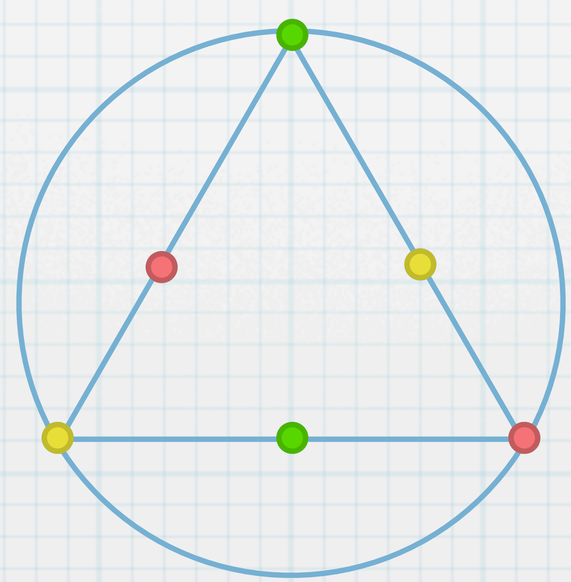


# Kritische Graphen

- **Definition 9**:
  Ein Graph $G$ heißt $k$–kritisch (genau: $k$–knotenkritisch), wenn $\chi(G) = k$ und $\chi(G - v) < k$ für alle Knoten $v$ von $G$.
- Beispiele:
  - $K_1$ ist der einzige 1–kritische Graph.
  - Ein 2–kritischer Graph $G$ ist bipartit (Übung), und für jeden Knoten $v$ ist $G - v$ 1–färbbar. Also ist $K_2$ der einzige 2–kritische Graph.
  - Ein Zyklus ungerader Länge ist 3–kritisch.

  - Der folgende Graph ist 4–kritisch:

# Der Satz von Dirac, Teil 1

# Der Satz von Dirac, Teil 1

* **Satz 10** (Dirac, 1952):
  Sei $G$ ein $k$–kritischer Graph. Dann gilt:

# Der Satz von Dirac, Teil 1

* **Satz 10** (Dirac, 1952):
  Sei $G$ ein $k$–kritischer Graph. Dann gilt:
  (a) $G$ ist zusammenhängend,

# Der Satz von Dirac, Teil 1

* **Satz 10** (Dirac, 1952):
  Sei $G$ ein $k$–kritischer Graph. Dann gilt:
  (a) $G$ ist zusammenhängend,
  (b) $\deg(v) \geq k - 1$ für alle Knoten $v$ von $G$.

# Der Satz von Dirac, Teil 1

* **Satz 10** (Dirac, 1952):
  Sei $G$ ein $k$–kritischer Graph. Dann gilt:
  (a) $G$ ist zusammenhängend,
  (b) $\deg(v) \geq k-1$ für alle Knoten $v$ von $G$.
* Beweis:

# Der Satz von Dirac, Teil 1

* **Satz 10** (Dirac, 1952):
  Sei $G$ ein $k$–kritischer Graph. Dann gilt:
  (a) $G$ ist zusammenhängend,
  (b) $\deg(v) \geq k - 1$ für alle Knoten $v$ von $G$.
* Beweis:
  (a) Angenommen, $G$ ist nicht zusammenhängend.

# Der Satz von Dirac, Teil 1

* **Satz 10** (Dirac, 1952):
  Sei $G$ ein $k$–kritischer Graph. Dann gilt:
  (a) $G$ ist zusammenhängend,
  (b) $\deg(v) \geq k - 1$ für alle Knoten $v$ von $G$.
* Beweis:
  (a) Angenommen, $G$ ist nicht zusammenhängend.
  Nach Satz 3(f) gibt es eine Zusammenhangskomponente $C$ von $G$ mit $\chi(C) = k$.

# Der Satz von Dirac, Teil 1

* **Satz 10** (Dirac, 1952):
  Sei $G$ ein $k$–kritischer Graph. Dann gilt:
  (a) $G$ ist zusammenhängend,
  (b) $\deg(v) \geq k - 1$ für alle Knoten $v$ von $G$.
* Beweis:
  (a) Angenommen, $G$ ist nicht zusammenhängend.
  Nach Satz 3(f) gibt es eine Zusammenhangskomponente $C$ von $G$ mit $\chi(C) = k$.
  Sei nun $v$ ein Knoten von $G$, der nicht Knoten in $C$ ist.

# Der Satz von Dirac, Teil 1

* **Satz 10** (Dirac, 1952):
  Sei $G$ ein $k$-kritischer Graph. Dann gilt:
  (a) $G$ ist zusammenhängend,
  (b) $\deg(v) \geq k - 1$ für alle Knoten $v$ von $G$.
* Beweis:
  (a) Angenommen, $G$ ist nicht zusammenhängend.
  Nach Satz 3(f) gibt es eine Zusammenhangskomponente $C$ von $G$ mit $\chi(C) = k$.
  Sei nun $v$ ein Knoten von $G$, der nicht Knoten in $C$ ist.
  Dann ist $C$ auch Komponente des Untergraphen $G - v$.

# Der Satz von Dirac, Teil 1

* **Satz 10** (Dirac, 1952):
  Sei $G$ ein $k$–kritischer Graph. Dann gilt:
  (a) $G$ ist zusammenhängend,
  (b) $\deg(v) \geq k-1$ für alle Knoten $v$ von $G$.
* Beweis:
  (a) Angenommen, $G$ ist nicht zusammenhängend.
  Nach Satz 3(f) gibt es eine Zusammenhangskomponente $C$ von $G$ mit $\chi(C) = k$.
  Sei nun $v$ ein Knoten von $G$, der nicht Knoten in $C$ ist.
  Dann ist $C$ auch Komponente des Untergraphen $G - v$.
  Wiederum nach Satz 3(f) ist dann $\chi(G-v) = \chi(C) = k$.

# Der Satz von Dirac, Teil 1

* **Satz 10** (Dirac, 1952):
  Sei $G$ ein $k$–kritischer Graph. Dann gilt:
  (a) $G$ ist zusammenhängend,
  (b) $\deg(v) \geq k - 1$ für alle Knoten $v$ von $G$.
* Beweis:
  (a) Angenommen, $G$ ist nicht zusammenhängend.
  Nach Satz 3(f) gibt es eine Zusammenhangskomponente $C$ von $G$ mit $\chi(C) = k$.
  Sei nun $v$ ein Knoten von $G$, der nicht Knoten in $C$ ist.
  Dann ist $C$ auch Komponente des Untergraphen $G - v$.
  Wiederum nach Satz 3(f) ist dann $\chi(G - v) = \chi(C) = k$.
  Widerspruch, da $G$ $k$–kritisch.

# Der Satz von Dirac, Teil 1

* **Satz 10** (Dirac, 1952):
  Sei $G$ ein $k$–kritischer Graph. Dann gilt:
  (a) $G$ ist zusammenhängend,
  (b) $\deg(v) \geq k-1$ für alle Knoten $v$ von $G$.
* Beweis:
  (a) Angenommen, $G$ ist nicht zusammenhängend.
  Nach Satz 3(f) gibt es eine Zusammenhangskomponente $C$ von $G$ mit $\chi(C) = k$.
  Sei nun $v$ ein Knoten von $G$, der nicht Knoten in $C$ ist.
  Dann ist $C$ auch Komponente des Untergraphen $G - v$.
  Wiederum nach Satz 3(f) ist dann $\chi(G - v) = \chi(C) = k$.
  Widerspruch, da $G$ $k$–kritisch.
  Also ist $G$ zusammenhängend.

# Der Satz von Dirac, Teil 1

* **Satz 10** (Dirac, 1952):
  Sei $G$ ein $k$–kritischer Graph. Dann gilt:
  (a) $G$ ist zusammenhängend,
  (b) $\deg(v) \geq k - 1$ für alle Knoten $v$ von $G$.
* Beweis:
  (a) Angenommen, $G$ ist nicht zusammenhängend.
  Nach Satz 3(f) gibt es eine Zusammenhangskomponente $C$ von $G$ mit $\chi(C) = k$.
  Sei nun $v$ ein Knoten von $G$, der nicht Knoten in $C$ ist.
  Dann ist $C$ auch Komponente des Untergraphen $G - v$.
  Wiederum nach Satz 3(f) ist dann $\chi(G - v) = \chi(C) = k$.
  Widerspruch, da $G$ $k$–kritisch.
  Also ist $G$ zusammenhängend.
  (b) Angenommen, es gibt einen Knoten $v$ von $G$ mit $\deg(v) < k - 1$.

# Der Satz von Dirac, Teil 1

* **Satz 10** (Dirac, 1952):
  Sei $G$ ein $k$–kritischer Graph. Dann gilt:
  (a) $G$ ist zusammenhängend,
  (b) $\deg(v) \geq k-1$ für alle Knoten $v$ von $G$.
* Beweis:
  (a) Angenommen, $G$ ist nicht zusammenhängend.
  Nach Satz 3(f) gibt es eine Zusammenhangskomponente $C$ von $G$ mit $\chi(C) = k$.
  Sei nun $v$ ein Knoten von $G$, der nicht Knoten in $C$ ist.
  Dann ist $C$ auch Komponente des Untergraphen $G - v$.
  Wiederum nach Satz 3(f) ist dann $\chi(G-v) = \chi(C) = k$.
  Widerspruch, da $G$ $k$–kritisch.
  Also ist $G$ zusammenhängend.
  (b) Angenommen, es gibt einen Knoten $v$ von $G$ mit $\deg(v) < k-1$.
  Da $G$ $k$–kritisch ist, hat der Untergraph $G - v$ eine Färbung mit $k-1$ Farben.

# Der Satz von Dirac, Teil 1

* **Satz 10** (Dirac, 1952):
  Sei $G$ ein $k$–kritischer Graph. Dann gilt:
  (a) $G$ ist zusammenhängend,
  (b) $\deg(v) \geq k - 1$ für alle Knoten $v$ von $G$.
* Beweis:
  (a) Angenommen, $G$ ist nicht zusammenhängend.
  Nach Satz 3(f) gibt es eine Zusammenhangskomponente $C$ von $G$ mit $\chi(C) = k$.
  Sei nun $v$ ein Knoten von $G$, der nicht Knoten in $C$ ist.
  Dann ist $C$ auch Komponente des Untergraphen $G - v$.
  Wiederum nach Satz 3(f) ist dann $\chi(G - v) = \chi(C) = k$.
  Widerspruch, da $G$ $k$–kritisch.
  Also ist $G$ zusammenhängend.
  (b) Angenommen, es gibt einen Knoten $v$ von $G$ mit $\deg(v) < k - 1$.
  Da $G$ $k$–kritisch ist, hat der Untergraph $G - v$ eine Färbung mit $k - 1$ Farben.
  Knoten $v$ hat höchstens $k - 2$ Nachbarn in $G - v$.

# Der Satz von Dirac, Teil 1

* **Satz 10** (Dirac, 1952):
  Sei $G$ ein $k$–kritischer Graph. Dann gilt:
  (a) $G$ ist zusammenhängend,
  (b) $\deg(v) \geq k - 1$ für alle Knoten $v$ von $G$.
* Beweis:
  (a) Angenommen, $G$ ist nicht zusammenhängend.
  Nach Satz 3(f) gibt es eine Zusammenhangskomponente $C$ von $G$ mit $\chi(C) = k$.
  Sei nun $v$ ein Knoten von $G$, der nicht Knoten in $C$ ist.
  Dann ist $C$ auch Komponente des Untergraphen $G - v$.
  Wiederum nach Satz 3(f) ist dann $\chi(G - v) = \chi(C) = k$.
  Widerspruch, da $G$ $k$–kritisch.
  Also ist $G$ zusammenhängend.
  (b) Angenommen, es gibt einen Knoten $v$ von $G$ mit $\deg(v) < k - 1$.
  Da $G$ $k$–kritisch ist, hat der Untergraph $G - v$ eine Färbung mit $k - 1$ Farben.
  Knoten $v$ hat höchstens $k - 2$ Nachbarn in $G - v$.
  Für diese Nachbarn werden daher nicht alle $k - 1$ Farben verbraucht.

# Der Satz von Dirac, Teil 1

* **Satz 10** (Dirac, 1952):
  Sei $G$ ein $k$–kritischer Graph. Dann gilt:
  (a) $G$ ist zusammenhängend,
  (b) $\deg(v) \geq k - 1$ für alle Knoten $v$ von $G$.
* Beweis:
  (a) Angenommen, $G$ ist nicht zusammenhängend.
  Nach Satz 3(f) gibt es eine Zusammenhangskomponente $C$ von $G$ mit $\chi(C) = k$.
  Sei nun $v$ ein Knoten von $G$, der nicht Knoten in $C$ ist.
  Dann ist $C$ auch Komponente des Untergraphen $G - v$.
  Wiederum nach Satz 3(f) ist dann $\chi(G - v) = \chi(C) = k$.
  Widerspruch, da $G$ $k$–kritisch.
  Also ist $G$ zusammenhängend.
  (b) Angenommen, es gibt einen Knoten $v$ von $G$ mit $\deg(v) < k - 1$.
  Da $G$ $k$–kritisch ist, hat der Untergraph $G - v$ eine Färbung mit $k - 1$ Farben.
  Knoten $v$ hat höchstens $k - 2$ Nachbarn in $G - v$.
  Für diese Nachbarn werden daher nicht alle $k - 1$ Farben verbraucht.
  Färbe nun $v$ mit einer Farbe, die unter den Nachbarn nicht vorkommt.

# Der Satz von Dirac, Teil 1

* **Satz 10** (Dirac, 1952):
  Sei $G$ ein $k$–kritischer Graph. Dann gilt:
  (a) $G$ ist zusammenhängend,
  (b) $\deg(v) \geq k - 1$ für alle Knoten $v$ von $G$.
* Beweis:
  (a) Angenommen, $G$ ist nicht zusammenhängend.
  Nach Satz 3(f) gibt es eine Zusammenhangskomponente $C$ von $G$ mit $\chi(C) = k$.
  Sei nun $v$ ein Knoten von $G$, der nicht Knoten in $C$ ist.
  Dann ist $C$ auch Komponente des Untergraphen $G - v$.
  Wiederum nach Satz 3(f) ist dann $\chi(G - v) = \chi(C) = k$.
  Widerspruch, da $G$ $k$–kritisch.
  Also ist $G$ zusammenhängend.
  (b) Angenommen, es gibt einen Knoten $v$ von $G$ mit $\deg(v) < k - 1$.
  Da $G$ $k$–kritisch ist, hat der Untergraph $G - v$ eine Färbung mit $k - 1$ Farben.
  Knoten $v$ hat höchstens $k - 2$ Nachbarn in $G - v$.
  Für diese Nachbarn werden daher nicht alle $k - 1$ Farben verbraucht.
  Färbe nun $v$ mit einer Farbe, die unter den Nachbarn nicht vorkommt.
  Damit erhalten wir eine Färbung von ganz $G$, die mit $k - 1$ Farben auskommt.

# Der Satz von Dirac, Teil 1

* **Satz 10** (Dirac, 1952):
  Sei $G$ ein $k$–kritischer Graph. Dann gilt:
  (a) $G$ ist zusammenhängend,
  (b) $\deg(v) \geq k - 1$ für alle Knoten $v$ von $G$.
* Beweis:
  (a) Angenommen, $G$ ist nicht zusammenhängend.
  Nach Satz 3(f) gibt es eine Zusammenhangskomponente $C$ von $G$ mit $\chi(C) = k$.
  Sei nun $v$ ein Knoten von $G$, der nicht Knoten in $C$ ist.
  Dann ist $C$ auch Komponente des Untergraphen $G - v$.
  Wiederum nach Satz 3(f) ist dann $\chi(G - v) = \chi(C) = k$.
  Widerspruch, da $G$ $k$–kritisch.
  Also ist $G$ zusammenhängend.
  (b) Angenommen, es gibt einen Knoten $v$ von $G$ mit $\deg(v) < k - 1$.
  Da $G$ $k$–kritisch ist, hat der Untergraph $G - v$ eine Färbung mit $k - 1$ Farben.
  Knoten $v$ hat höchstens $k - 2$ Nachbarn in $G - v$.
  Für diese Nachbarn werden daher nicht alle $k - 1$ Farben verbraucht.
  Färbe nun $v$ mit einer Farbe, die unter den Nachbarn nicht vorkommt.
  Damit erhalten wir eine Färbung von ganz $G$, die mit $k - 1$ Farben auskommt.
  Widerspruch, da $\chi(G) = k$.

# Der Satz von Dirac, Teil 1

* **Satz 10** (Dirac, 1952):
  Sei $G$ ein $k$–kritischer Graph. Dann gilt:
  (a) $G$ ist zusammenhängend,
  (b) $\deg(v) \geq k-1$ für alle Knoten $v$ von $G$.
* Beweis:
  (a) Angenommen, $G$ ist nicht zusammenhängend.
  Nach Satz 3(f) gibt es eine Zusammenhangskomponente $C$ von $G$ mit $\chi(C) = k$.
  Sei nun $v$ ein Knoten von $G$, der nicht Knoten in $C$ ist.
  Dann ist $C$ auch Komponente des Untergraphen $G - v$.
  Wiederum nach Satz 3(f) ist dann $\chi(G - v) = \chi(C) = k$.
  Widerspruch, da $G$ $k$–kritisch.
  Also ist $G$ zusammenhängend.
  (b) Angenommen, es gibt einen Knoten $v$ von $G$ mit $\deg(v) < k - 1$.
  Da $G$ $k$–kritisch ist, hat der Untergraph $G - v$ eine Färbung mit $k - 1$ Farben.
  Knoten $v$ hat höchstens $k - 2$ Nachbarn in $G - v$.
  Für diese Nachbarn werden daher nicht alle $k - 1$ Farben verbraucht.
  Färbe nun $v$ mit einer Farbe, die unter den Nachbarn nicht vorkommt.
  Damit erhalten wir eine Färbung von ganz $G$, die mit $k - 1$ Farben auskommt.
  Widerspruch, da $\chi(G) = k$.
  Also ist $\deg(v) \geq k - 1$ für alle Knoten $v$ von $G$.

# Der Satz von Dirac, Teil 2

# Der Satz von Dirac, Teil 2

* **Satz 10** (Dirac, 1952):
  Sei $G$ ein $k$–kritischer Graph. Dann gilt ferner:

# Der Satz von Dirac, Teil 2

* **Satz 10** (Dirac, 1952):
  Sei $G$ ein $k$–kritischer Graph. Dann gilt ferner:
  (c) es gibt keine Knotenteilmengen $V_1, V_2$ mit $\emptyset \neq V_1, V_2 \neq V, V = V_1 \cup V_2$ und der von $V_1 \cap V_2$ induzierte Untergraph ist vollständig,

# Der Satz von Dirac, Teil 2

* **Satz 10** (Dirac, 1952):
  Sei $G$ ein $k$–kritischer Graph. Dann gilt ferner:
  (c) es gibt keine Knotenteilmengen $V_1, V_2$ mit $\emptyset \neq V_1, V_2 \neq V, V = V_1 \cup V_2$ und der von $V_1 \cap V_2$ induzierte Untergraph ist vollständig,
  (d) $G - v$ ist für alle Knoten $v$ von $G$ zusammenhängend (falls $k > 1$).

# Der Satz von Dirac, Teil 2

- **Satz 10** (Dirac, 1952):
  Sei $G$ ein $k$–kritischer Graph. Dann gilt ferner:
  (c) es gibt keine Knotenteilmengen $V_1, V_2$ mit $\emptyset \neq V_1, V_2 \neq V, V = V_1 \cup V_2$ und der von $V_1 \cap V_2$ induzierte Untergraph ist vollständig,
  (d) $G - v$ ist für alle Knoten $v$ von $G$ zusammenhängend (falls $k > 1$).
- Beweis:

# Der Satz von Dirac, Teil 2

* **Satz 10** (Dirac, 1952):
  Sei $G$ ein $k$–kritischer Graph. Dann gilt ferner:
  (c) es gibt keine Knotenteilmengen $V_1, V_2$ mit $\emptyset \neq V_1, V_2 \neq V, V = V_1 \cup V_2$ und der von $V_1 \cap V_2$ induzierte Untergraph ist vollständig,
  (d) $G - v$ ist für alle Knoten $v$ von $G$ zusammenhängend (falls $k > 1$).
* Beweis:
  (c) Angenommen, es gibt zwei Knotenteilmengen $V_1, V_2$ wie angegeben.

# Der Satz von Dirac, Teil 2

* **Satz 10** (Dirac, 1952):
  Sei $G$ ein $k$–kritischer Graph. Dann gilt ferner:
  (c) es gibt keine Knotenteilmengen $V_1, V_2$ mit $\emptyset \neq V_1, V_2 \neq V, V = V_1 \cup V_2$ und der von $V_1 \cap V_2$ induzierte Untergraph ist vollständig,
  (d) $G - v$ ist für alle Knoten $v$ von $G$ zusammenhängend (falls $k > 1$).
* Beweis:
  (c) Angenommen, es gibt zwei Knotenteilmengen $V_1, V_2$ wie angegeben.
  Seien $G_1, G_2, G_{1\cap 2}$ die von $V_1, V_2, V_1 \cap V_2$ induzierten Untergraphen von $G$.

# Der Satz von Dirac, Teil 2

* **Satz 10** (Dirac, 1952):
  Sei $G$ ein $k$–kritischer Graph. Dann gilt ferner:
  (c) es gibt keine Knotenteilmengen $V_1, V_2$ mit $\emptyset \neq V_1, V_2 \neq V, V = V_1 \cup V_2$ und der von $V_1 \cap V_2$ induzierte Untergraph ist vollständig,
  (d) $G - v$ ist für alle Knoten $v$ von $G$ zusammenhängend (falls $k > 1$).
* Beweis:
  (c) Angenommen, es gibt zwei Knotenteilmengen $V_1, V_2$ wie angegeben.
  Seien $G_1, G_2, G_{1\cap 2}$ die von $V_1, V_2, V_1 \cap V_2$ induzierten Untergraphen von $G$.
  Da $G$ $k$–kritisch ist, ist die chromatische Zahl von $G_1$ und $G_2$ höchstens $k - 1$.

# Der Satz von Dirac, Teil 2

* **Satz 10** (Dirac, 1952):
  Sei $G$ ein $k$–kritischer Graph. Dann gilt ferner:
  (c) es gibt keine Knotenteilmengen $V_1, V_2$ mit $\emptyset \neq V_1, V_2 \neq V, V = V_1 \cup V_2$ und der von $V_1 \cap V_2$ induzierte Untergraph ist vollständig,
  (d) $G - v$ ist für alle Knoten $v$ von $G$ zusammenhängend (falls $k > 1$).
* Beweis:
  (c) Angenommen, es gibt zwei Knotenteilmengen $V_1, V_2$ wie angegeben.
  Seien $G_1, G_2, G_{1\cap 2}$ die von $V_1, V_2, V_1 \cap V_2$ induzierten Untergraphen von $G$.
  Da $G$ $k$–kritisch ist, ist die chromatische Zahl von $G_1$ und $G_2$ höchstens $k-1$.
  Wähle eine Färbung von $G_1$ und eine von $G_2$ mit jeweils (höchstens) $k-1$ Farben.

# Der Satz von Dirac, Teil 2

* **Satz 10** (Dirac, 1952):
  Sei $G$ ein $k$–kritischer Graph. Dann gilt ferner:
  (c) es gibt keine Knotenteilmengen $V_1, V_2$ mit $\emptyset \neq V_1, V_2 \neq V, V = V_1 \cup V_2$ und der von $V_1 \cap V_2$ induzierte Untergraph ist vollständig,
  (d) $G - v$ ist für alle Knoten $v$ von $G$ zusammenhängend (falls $k > 1$).
* Beweis:
  (c) Angenommen, es gibt zwei Knotenteilmengen $V_1, V_2$ wie angegeben.
  Seien $G_1, G_2, G_{1\cap 2}$ die von $V_1, V_2, V_1 \cap V_2$ induzierten Untergraphen von $G$.
  Da $G$ $k$–kritisch ist, ist die chromatische Zahl von $G_1$ und $G_2$ höchstens $k-1$.
  Wähle eine Färbung von $G_1$ und eine von $G_2$ mit jeweils (höchstens) $k-1$ Farben.
  In $G_{1\cap 2}$ hat jeder Knoten eine andere Farbe, da dieser Graph vollständig ist.

# Der Satz von Dirac, Teil 2

* **Satz 10** (Dirac, 1952):
  Sei $G$ ein $k$–kritischer Graph. Dann gilt ferner:
  (c) es gibt keine Knotenteilmengen $V_1, V_2$ mit $\emptyset \neq V_1, V_2 \neq V, V = V_1 \cup V_2$ und der von $V_1 \cap V_2$ induzierte Untergraph ist vollständig,
  (d) $G - v$ ist für alle Knoten $v$ von $G$ zusammenhängend (falls $k > 1$).
* Beweis:
  (c) Angenommen, es gibt zwei Knotenteilmengen $V_1, V_2$ wie angegeben.
  Seien $G_1, G_2, G_{1\cap 2}$ die von $V_1, V_2, V_1 \cap V_2$ induzierten Untergraphen von $G$.
  Da $G$ $k$–kritisch ist, ist die chromatische Zahl von $G_1$ und $G_2$ höchstens $k-1$.
  Wähle eine Färbung von $G_1$ und eine von $G_2$ mit jeweils (höchstens) $k-1$ Farben.
  In $G_{1\cap 2}$ hat jeder Knoten eine andere Farbe, da dieser Graph vollständig ist.
  Wir können daher die Farben in $G_2$ so umordnen, dass die Knoten in $G_{1\cap 2}$ die gleichen Farben haben wie in $G_1$.

# Der Satz von Dirac, Teil 2

* **Satz 10** (Dirac, 1952):
  Sei $G$ ein $k$–kritischer Graph. Dann gilt ferner:
  (c) es gibt keine Knotenteilmengen $V_1, V_2$ mit $\emptyset \neq V_1, V_2 \neq V, V = V_1 \cup V_2$ und der von $V_1 \cap V_2$ induzierte Untergraph ist vollständig,
  (d) $G - v$ ist für alle Knoten $v$ von $G$ zusammenhängend (falls $k > 1$).
* Beweis:
  (c) Angenommen, es gibt zwei Knotenteilmengen $V_1, V_2$ wie angegeben.
  Seien $G_1, G_2, G_{1\cap 2}$ die von $V_1, V_2, V_1 \cap V_2$ induzierten Untergraphen von $G$.
  Da $G$ $k$–kritisch ist, ist die chromatische Zahl von $G_1$ und $G_2$ höchstens $k-1$.
  Wähle eine Färbung von $G_1$ und eine von $G_2$ mit jeweils (höchstens) $k-1$ Farben.
  In $G_{1\cap 2}$ hat jeder Knoten eine andere Farbe, da dieser Graph vollständig ist.
  Wir können daher die Farben in $G_2$ so umordnen, dass die Knoten in $G_{1\cap 2}$ die gleichen Farben haben wie in $G_1$.
  Damit haben die Knoten in $V_1 \cup V_2 = V(G)$ zusammen nur $k-1$ Farben.

# Der Satz von Dirac, Teil 2

* **Satz 10** (Dirac, 1952):
  Sei $G$ ein $k$–kritischer Graph. Dann gilt ferner:
  (c) es gibt keine Knotenteilmengen $V_1, V_2$ mit $\emptyset \neq V_1, V_2 \neq V, V = V_1 \cup V_2$ und der von $V_1 \cap V_2$ induzierte Untergraph ist vollständig,
  (d) $G - v$ ist für alle Knoten $v$ von $G$ zusammenhängend (falls $k > 1$).
* Beweis:
  (c) Angenommen, es gibt zwei Knotenteilmengen $V_1, V_2$ wie angegeben.
  Seien $G_1, G_2, G_{1\cap 2}$ die von $V_1, V_2, V_1 \cap V_2$ induzierten Untergraphen von $G$.
  Da $G$ $k$–kritisch ist, ist die chromatische Zahl von $G_1$ und $G_2$ höchstens $k-1$.
  Wähle eine Färbung von $G_1$ und eine von $G_2$ mit jeweils (höchstens) $k-1$ Farben.
  In $G_{1\cap 2}$ hat jeder Knoten eine andere Farbe, da dieser Graph vollständig ist.
  Wir können daher die Farben in $G_2$ so umordnen, dass die Knoten in $G_{1\cap 2}$ die gleichen Farben haben wie in $G_1$.
  Damit haben die Knoten in $V_1 \cup V_2 = V(G)$ zusammen nur $k-1$ Farben.
  Also ist $G$ mit $k-1$ Farben färbbar, im Widerspruch dazu, dass $G$ $k$–kritisch ist.

# Der Satz von Dirac, Teil 2

* **Satz 10** (Dirac, 1952):
  Sei $G$ ein $k$-kritischer Graph. Dann gilt ferner:
  (c) es gibt keine Knotenteilmengen $V_1, V_2$ mit $\emptyset \neq V_1, V_2 \neq V, V = V_1 \cup V_2$ und der von $V_1 \cap V_2$ induzierte Untergraph ist vollständig,
  (d) $G - v$ ist für alle Knoten $v$ von $G$ zusammenhängend (falls $k > 1$).
* Beweis:
  (c) Angenommen, es gibt zwei Knotenteilmengen $V_1, V_2$ wie angegeben.
  Seien $G_1, G_2, G_{1\cap 2}$ die von $V_1, V_2, V_1 \cap V_2$ induzierten Untergraphen von $G$.
  Da $G$ $k$-kritisch ist, ist die chromatische Zahl von $G_1$ und $G_2$ höchstens $k-1$.
  Wähle eine Färbung von $G_1$ und eine von $G_2$ mit jeweils (höchstens) $k-1$ Farben.
  In $G_{1\cap 2}$ hat jeder Knoten eine andere Farbe, da dieser Graph vollständig ist.
  Wir können daher die Farben in $G_2$ so umordnen, dass die Knoten in $G_{1\cap 2}$ die gleichen Farben haben wie in $G_1$.
  Damit haben die Knoten in $V_1 \cup V_2 = V(G)$ zusammen nur $k-1$ Farben.
  Also ist $G$ mit $k-1$ Farben färbbar, im Widerspruch dazu, dass $G$ $k$-kritisch ist.
  (d) Angenommen, es gibt einen Knoten $v$ in $G$, so dass $G - v$ nicht zusammenhängend ist.

# Der Satz von Dirac, Teil 2

* **Satz 10** (Dirac, 1952):
  Sei $G$ ein $k$–kritischer Graph. Dann gilt ferner:
  (c) es gibt keine Knotenteilmengen $V_1, V_2$ mit $\emptyset \neq V_1, V_2 \neq V, V = V_1 \cup V_2$ und der von $V_1 \cap V_2$ induzierte Untergraph ist vollständig,
  (d) $G - v$ ist für alle Knoten $v$ von $G$ zusammenhängend (falls $k > 1$).
* Beweis:
  (c) Angenommen, es gibt zwei Knotenteilmengen $V_1, V_2$ wie angegeben.
  Seien $G_1, G_2, G_{1\cap 2}$ die von $V_1, V_2, V_1 \cap V_2$ induzierten Untergraphen von $G$.
  Da $G$ $k$–kritisch ist, ist die chromatische Zahl von $G_1$ und $G_2$ höchstens $k-1$.
  Wähle eine Färbung von $G_1$ und eine von $G_2$ mit jeweils (höchstens) $k-1$ Farben.
  In $G_{1\cap 2}$ hat jeder Knoten eine andere Farbe, da dieser Graph vollständig ist.
  Wir können daher die Farben in $G_2$ so umordnen, dass die Knoten in $G_{1\cap 2}$ die gleichen Farben haben wie in $G_1$.
  Damit haben die Knoten in $V_1 \cup V_2 = V(G)$ zusammen nur $k-1$ Farben.
  Also ist $G$ mit $k-1$ Farben färbbar, im Widerspruch dazu, dass $G$ $k$–kritisch ist.
  (d) Angenommen, es gibt einen Knoten $v$ in $G$, so dass $G - v$ nicht zusammenhängend ist.
  Dann zerfällt $G - v$ in die disjunkten Untergraphen $H_1$ und $H_2$.

# Der Satz von Dirac, Teil 2

* **Satz 10** (Dirac, 1952):
  Sei $G$ ein $k$–kritischer Graph. Dann gilt ferner:
  (c) es gibt keine Knotenteilmengen $V_1, V_2$ mit $\emptyset \neq V_1, V_2 \neq V, V = V_1 \cup V_2$ und der von $V_1 \cap V_2$ induzierte Untergraph ist vollständig,
  (d) $G - v$ ist für alle Knoten $v$ von $G$ zusammenhängend (falls $k > 1$).
* Beweis:
  (c) Angenommen, es gibt zwei Knotenteilmengen $V_1, V_2$ wie angegeben.
  Seien $G_1, G_2, G_{1\cap 2}$ die von $V_1, V_2, V_1 \cap V_2$ induzierten Untergraphen von $G$.
  Da $G$ $k$–kritisch ist, ist die chromatische Zahl von $G_1$ und $G_2$ höchstens $k-1$.
  Wähle eine Färbung von $G_1$ und eine von $G_2$ mit jeweils (höchstens) $k-1$ Farben.
  In $G_{1\cap 2}$ hat jeder Knoten eine andere Farbe, da dieser Graph vollständig ist.
  Wir können daher die Farben in $G_2$ so umordnen, dass die Knoten in $G_{1\cap 2}$ die gleichen Farben haben wie in $G_1$.
  Damit haben die Knoten in $V_1 \cup V_2 = V(G)$ zusammen nur $k-1$ Farben.
  Also ist $G$ mit $k-1$ Farben färbbar, im Widerspruch dazu, dass $G$ $k$–kritisch ist.
  (d) Angenommen, es gibt einen Knoten $v$ in $G$, so dass $G - v$ nicht zusammenhängend ist.
  Dann zerfällt $G - v$ in die disjunkten Untergraphen $H_1$ und $H_2$.
  Setze $V_1 := V(H_1) \cup \{v\}$ und $V_2 := V(H_2) \cup \{v\}$.

# Der Satz von Dirac, Teil 2

* **Satz 10** (Dirac, 1952):
  Sei $G$ ein $k$–kritischer Graph. Dann gilt ferner:
  (c) es gibt keine Knotenteilmengen $V_1, V_2$ mit $\emptyset \neq V_1, V_2 \neq V, V = V_1 \cup V_2$ und der von $V_1 \cap V_2$ induzierte Untergraph ist vollständig,
  (d) $G - v$ ist für alle Knoten $v$ von $G$ zusammenhängend (falls $k > 1$).
* Beweis:
  (c) Angenommen, es gibt zwei Knotenteilmengen $V_1, V_2$ wie angegeben.
  Seien $G_1, G_2, G_{1\cap 2}$ die von $V_1, V_2, V_1 \cap V_2$ induzierten Untergraphen von $G$.
  Da $G$ $k$–kritisch ist, ist die chromatische Zahl von $G_1$ und $G_2$ höchstens $k-1$.
  Wähle eine Färbung von $G_1$ und eine von $G_2$ mit jeweils (höchstens) $k-1$ Farben.
  In $G_{1\cap 2}$ hat jeder Knoten eine andere Farbe, da dieser Graph vollständig ist.
  Wir können daher die Farben in $G_2$ so umordnen, dass die Knoten in $G_{1\cap 2}$ die gleichen Farben haben wie in $G_1$.
  Damit haben die Knoten in $V_1 \cup V_2 = V(G)$ zusammen nur $k-1$ Farben.
  Also ist $G$ mit $k-1$ Farben färbbar, im Widerspruch dazu, dass $G$ $k$–kritisch ist.
  (d) Angenommen, es gibt einen Knoten $v$ in $G$, so dass $G - v$ nicht zusammenhängend ist.
  Dann zerfällt $G - v$ in die disjunkten Untergraphen $H_1$ und $H_2$.
  Setze $V_1 := V(H_1) \cup \{v\}$ und $V_2 := V(H_2) \cup \{v\}$.
  Dann ist $\emptyset \neq V_1, V_2 \neq V, V = V_1 \cup V_2$ und $V_1 \cap V_2 = \{v\} = V(K_1)$ ist ein vollständiger Untergraph von $G$.

# Der Satz von Dirac, Teil 2

* **Satz 10** (Dirac, 1952):
  Sei $G$ ein $k$–kritischer Graph. Dann gilt ferner:
  (c) es gibt keine Knotenteilmengen $V_1, V_2$ mit $\emptyset \neq V_1, V_2 \neq V, V = V_1 \cup V_2$ und der von $V_1 \cap V_2$ induzierte Untergraph ist vollständig,
  (d) $G - v$ ist für alle Knoten $v$ von $G$ zusammenhängend (falls $k > 1$).
* Beweis:
  (c) Angenommen, es gibt zwei Knotenteilmengen $V_1, V_2$ wie angegeben.
  Seien $G_1, G_2, G_{1\cap 2}$ die von $V_1, V_2, V_1 \cap V_2$ induzierten Untergraphen von $G$.
  Da $G$ $k$–kritisch ist, ist die chromatische Zahl von $G_1$ und $G_2$ höchstens $k-1$.
  Wähle eine Färbung von $G_1$ und eine von $G_2$ mit jeweils (höchstens) $k-1$ Farben.
  In $G_{1\cap 2}$ hat jeder Knoten eine andere Farbe, da dieser Graph vollständig ist.
  Wir können daher die Farben in $G_2$ so umordnen, dass die Knoten in $G_{1\cap 2}$ die gleichen Farben haben wie in $G_1$.
  Damit haben die Knoten in $V_1 \cup V_2 = V(G)$ zusammen nur $k-1$ Farben.
  Also ist $G$ mit $k-1$ Farben färbbar, im Widerspruch dazu, dass $G$ $k$–kritisch ist.
  (d) Angenommen, es gibt einen Knoten $v$ in $G$, so dass $G - v$ nicht zusammenhängend ist.
  Dann zerfällt $G - v$ in die disjunkten Untergraphen $H_1$ und $H_2$.
  Setze $V_1 := V(H_1) \cup \{v\}$ und $V_2 := V(H_2) \cup \{v\}$.
  Dann ist $\emptyset \neq V_1, V_2 \neq V, V = V_1 \cup V_2$ und $V_1 \cap V_2 = \{v\} = V(K_1)$ ist ein vollständiger Untergraph von $G$.
  Dieses ist ein Widerspruch zu (c).

# Der Satz von Dirac, Teil 2

- **Satz 10** (Dirac, 1952):
  Sei $G$ ein $k$–kritischer Graph. Dann gilt ferner:
  (c) es gibt keine Knotenteilmengen $V_1, V_2$ mit $\emptyset \neq V_1, V_2 \neq V, V = V_1 \cup V_2$ und der von $V_1 \cap V_2$ induzierte Untergraph ist vollständig,
  (d) $G - v$ ist für alle Knoten $v$ von $G$ zusammenhängend (falls $k > 1$).
- Beweis:
  (c) Angenommen, es gibt zwei Knotenteilmengen $V_1, V_2$ wie angegeben.
  Seien $G_1, G_2, G_{1\cap 2}$ die von $V_1, V_2, V_1 \cap V_2$ induzierten Untergraphen von $G$.
  Da $G$ $k$–kritisch ist, ist die chromatische Zahl von $G_1$ und $G_2$ höchstens $k-1$.
  Wähle eine Färbung von $G_1$ und eine von $G_2$ mit jeweils (höchstens) $k-1$ Farben.
  In $G_{1\cap 2}$ hat jeder Knoten eine andere Farbe, da dieser Graph vollständig ist.
  Wir können daher die Farben in $G_2$ so umordnen, dass die Knoten in $G_{1\cap 2}$ die gleichen Farben haben wie in $G_1$.
  Damit haben die Knoten in $V_1 \cup V_2 = V(G)$ zusammen nur $k-1$ Farben.
  Also ist $G$ mit $k-1$ Farben färbbar, im Widerspruch dazu, dass $G$ $k$–kritisch ist.
  (d) Angenommen, es gibt einen Knoten $v$ in $G$, so dass $G - v$ nicht zusammenhängend ist.
  Dann zerfällt $G - v$ in die disjunkten Untergraphen $H_1$ und $H_2$.
  Setze $V_1 := V(H_1) \cup \{v\}$ und $V_2 := V(H_2) \cup \{v\}$.
  Dann ist $\emptyset \neq V_1, V_2 \neq V, V = V_1 \cup V_2$ und $V_1 \cap V_2 = \{v\} = V(K_1)$ ist ein vollständiger Untergraph von $G$.
  Dieses ist ein Widerspruch zu (c).
  Also muss $G - v$ für alle Knoten $v$ zusammenhängend sein.

# Folgerungen aus dem Satz von Dirac

# Folgerungen aus dem Satz von Dirac

* **Satz 11**:
  Sei $G$ ein Graph mit $\chi(G) = k$. Dann enthält $G$ mindestens $k$ Knoten $v$ mit $\deg(v) \geq k-1$.

# Folgerungen aus dem Satz von Dirac

* **Satz 11**:
  Sei $G$ ein Graph mit $\chi(G) = k$. Dann enthält $G$ mindestens $k$ Knoten $v$ mit $\deg(v) \geq k - 1$.
* Beweis:

# Folgerungen aus dem Satz von Dirac

* **Satz 11**:
  Sei $G$ ein Graph mit $\chi(G) = k$. Dann enthält $G$ mindestens $k$ Knoten $v$ mit $\deg(v) \geq k-1$.
* Beweis:

  Sei $H$ ein $k$-kritischer Untergraph von $G$.

# Folgerungen aus dem Satz von Dirac

* **Satz 11**:
  Sei $G$ ein Graph mit $\chi(G) = k$. Dann enthält $G$ mindestens $k$ Knoten $v$ mit $\deg(v) \geq k - 1$.
* Beweis:

  Sei $H$ ein $k$-kritischer Untergraph von $G$.

  Nach dem Satz von Dirac ist $\deg_H(v) \geq k - 1$ für alle Knoten $v$ von $H$.

# Folgerungen aus dem Satz von Dirac

* **Satz 11**:
  Sei $G$ ein Graph mit $\chi(G) = k$. Dann enthält $G$ mindestens $k$ Knoten $v$ mit $\deg(v) \geq k-1$.
* Beweis:
  Sei $H$ ein $k$-kritischer Untergraph von $G$.
  Nach dem Satz von Dirac ist $\deg_H(v) \geq k-1$ für alle Knoten $v$ von $H$.
  Somit ist auch $\deg_G(v) \geq k-1$.

# Folgerungen aus dem Satz von Dirac

* **Satz 11**:
  Sei $G$ ein Graph mit $\chi(G) = k$. Dann enthält $G$ mindestens $k$ Knoten $v$ mit $\deg(v) \geq k - 1$.
* Beweis:
  - Sei $H$ ein $k$–kritischer Untergraph von $G$.
  - Nach dem Satz von Dirac ist $\deg_H(v) \geq k - 1$ für alle Knoten $v$ von $H$.
  - Somit ist auch $\deg_G(v) \geq k - 1$.
  - Da $H$ $k$–chromatisch ist, enthält $H$ mindestens $k$ Knoten.

# Folgerungen aus dem Satz von Dirac

* **Satz 11**:
  Sei $G$ ein Graph mit $\chi(G) = k$. Dann enthält $G$ mindestens $k$ Knoten $v$ mit $\deg(v) \geq k-1$.
* Beweis:
  Sei $H$ ein $k$-kritischer Untergraph von $G$.
  Nach dem Satz von Dirac ist $\deg_H(v) \geq k-1$ für alle Knoten $v$ von $H$.
  Somit ist auch $\deg_G(v) \geq k-1$.
  Da $H$ $k$-chromatisch ist, enthält $H$ mindestens $k$ Knoten.
* **Satz 12** (Welsh, Powell, 1967):
  Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $\deg(x_1) \geq \ldots \geq \deg(x_n)$. Dann gilt $\chi(G) \leq \max_{1 \leq i \leq n}\{\min\{i, \deg(x_i) + 1\}\}$.

# Folgerungen aus dem Satz von Dirac

* **Satz 11**:
  Sei $G$ ein Graph mit $\chi(G) = k$. Dann enthält $G$ mindestens $k$ Knoten $v$ mit $\deg(v) \geq k-1$.
* Beweis:
  Sei $H$ ein $k$–kritischer Untergraph von $G$.
  Nach dem Satz von Dirac ist $\deg_H(v) \geq k-1$ für alle Knoten $v$ von $H$.
  Somit ist auch $\deg_G(v) \geq k-1$.
  Da $H$ $k$–chromatisch ist, enthält $H$ mindestens $k$ Knoten.
* **Satz 12** (Welsh, Powell, 1967):
  Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $\deg(x_1) \geq \ldots \geq \deg(x_n)$. Dann gilt $\chi(G) \leq \max_{1 \leq i \leq n}\{\min\{i, \deg(x_i) + 1\}\}$.
* Beweis:

# Folgerungen aus dem Satz von Dirac

- **Satz 11**:
  Sei $G$ ein Graph mit $\chi(G) = k$. Dann enthält $G$ mindestens $k$ Knoten $v$ mit $\deg(v) \geq k - 1$.
- Beweis:
  - Sei $H$ ein $k$–kritischer Untergraph von $G$.
  - Nach dem Satz von Dirac ist $\deg_H(v) \geq k - 1$ für alle Knoten $v$ von $H$.
  - Somit ist auch $\deg_G(v) \geq k - 1$.
  - Da $H$ $k$–chromatisch ist, enthält $H$ mindestens $k$ Knoten.
- **Satz 12** (Welsh, Powell, 1967):
  Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $\deg(x_1) \geq \ldots \geq \deg(x_n)$. Dann gilt $\chi(G) \leq \max_{1 \leq i \leq n}\{\min\{i, \deg(x_i) + 1\}\}$.
- Beweis:
  1. Fall, $G$ hat keine Kanten.

# Folgerungen aus dem Satz von Dirac

* **Satz 11**:
  Sei $G$ ein Graph mit $\chi(G) = k$. Dann enthält $G$ mindestens $k$ Knoten $v$ mit $\deg(v) \geq k-1$.
* Beweis:

  Sei $H$ ein $k$-kritischer Untergraph von $G$.

  Nach dem Satz von Dirac ist $\deg_H(v) \geq k-1$ für alle Knoten $v$ von $H$.

  Somit ist auch $\deg_G(v) \geq k-1$.

  Da $H$ $k$-chromatisch ist, enthält $H$ mindestens $k$ Knoten.
* **Satz 12** (Welsh, Powell, 1967):
  Sei $G=(V,E)$ ein Graph mit $V=\{x_1,\ldots,x_n\}$ und $\deg(x_1) \geq \ldots \geq \deg(x_n)$. Dann gilt $\chi(G) \leq \max_{1 \leq i \leq n}\{\min\{i, \deg(x_i)+1\}\}$.
* Beweis:

  1. Fall, $G$ hat keine Kanten.

     Dann ist $\chi(G) = 1$ und $\deg(x_i) = 0$ für alle Knoten $x_i$.

# Folgerungen aus dem Satz von Dirac

* **Satz 11**:
  Sei $G$ ein Graph mit $\chi(G) = k$. Dann enthält $G$ mindestens $k$ Knoten $v$ mit $\deg(v) \geq k-1$.
* Beweis:
  Sei $H$ ein $k$-kritischer Untergraph von $G$.
  Nach dem Satz von Dirac ist $\deg_H(v) \geq k-1$ für alle Knoten $v$ von $H$.
  Somit ist auch $\deg_G(v) \geq k-1$.
  Da $H$ $k$-chromatisch ist, enthält $H$ mindestens $k$ Knoten.
* **Satz 12** (Welsh, Powell, 1967):
  Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $\deg(x_1) \geq \ldots \geq \deg(x_n)$. Dann gilt $\chi(G) \leq \max_{1 \leq i \leq n}\{\min\{i, \deg(x_i) + 1\}\}$.
* Beweis:
  1. Fall, $G$ hat keine Kanten.
     Dann ist $\chi(G) = 1$ und $\deg(x_i) = 0$ für alle Knoten $x_i$.
     Also ist $\max_{1 \leq i \leq n}\{\min\{i, \deg(x_i) + 1\}\} = \max_{1 \leq i \leq n}\{\min\{i, 1\}\} = 1$.

# Folgerungen aus dem Satz von Dirac

* **Satz 11**:
Sei $G$ ein Graph mit $\chi(G) = k$. Dann enthält $G$ mindestens $k$ Knoten $v$ mit $\deg(v) \geq k-1$.
* Beweis:
  Sei $H$ ein $k$-kritischer Untergraph von $G$.
  Nach dem Satz von Dirac ist $\deg_H(v) \geq k-1$ für alle Knoten $v$ von $H$.
  Somit ist auch $\deg_G(v) \geq k-1$.
  Da $H$ $k$-chromatisch ist, enthält $H$ mindestens $k$ Knoten.
* **Satz 12** (Welsh, Powell, 1967):
Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $\deg(x_1) \geq \ldots \geq \deg(x_n)$. Dann gilt $\chi(G) \leq \max_{1 \leq i \leq n}\{\min\{i, \deg(x_i) + 1\}\}$.
* Beweis:
  1. Fall, $G$ hat keine Kanten.
     Dann ist $\chi(G) = 1$ und $\deg(x_i) = 0$ für alle Knoten $x_i$.
     Also ist $\max_{1 \leq i \leq n}\{\min\{i, \deg(x_i) + 1\}\} = \max_{1 \leq i \leq n}\{\min\{i, 1\}\} = 1$.
  2. Fall, $G$ hat Kanten.

# Folgerungen aus dem Satz von Dirac

* **Satz 11**:
  Sei $G$ ein Graph mit $\chi(G) = k$. Dann enthält $G$ mindestens $k$ Knoten $v$ mit $\deg(v) \geq k-1$.
* Beweis:
  - Sei $H$ ein $k$-kritischer Untergraph von $G$.
  - Nach dem Satz von Dirac ist $\deg_H(v) \geq k-1$ für alle Knoten $v$ von $H$.
  - Somit ist auch $\deg_G(v) \geq k-1$.
  - Da $H$ $k$-chromatisch ist, enthält $H$ mindestens $k$ Knoten.
* **Satz 12** (Welsh, Powell, 1967):
  Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $\deg(x_1) \geq \ldots \geq \deg(x_n)$. Dann gilt $\chi(G) \leq \max_{1 \leq i \leq n}\{\min\{i, \deg(x_i)+1\}\}$.
* Beweis:
  1. Fall, $G$ hat keine Kanten.
     - Dann ist $\chi(G) = 1$ und $\deg(x_i) = 0$ für alle Knoten $x_i$.
     - Also ist $\max_{1 \leq i \leq n}\{\min\{i, \deg(x_i)+1\}\} = \max_{1 \leq i \leq n}\{\min\{i, 1\}\} = 1$.
  2. Fall, $G$ hat Kanten.
     - Sei $\chi(G) = k$.

# Folgerungen aus dem Satz von Dirac

* **Satz 11**:
  Sei $G$ ein Graph mit $\chi(G) = k$. Dann enthält $G$ mindestens $k$ Knoten $v$ mit $\deg(v) \geq k-1$.
* Beweis:
  Sei $H$ ein $k$–kritischer Untergraph von $G$.
  Nach dem Satz von Dirac ist $\deg_H(v) \geq k-1$ für alle Knoten $v$ von $H$.
  Somit ist auch $\deg_G(v) \geq k-1$.
  Da $H$ $k$–chromatisch ist, enthält $H$ mindestens $k$ Knoten.
* **Satz 12** (Welsh, Powell, 1967):
  Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $\deg(x_1) \geq \ldots \geq \deg(x_n)$. Dann gilt $\chi(G) \leq \max_{1 \leq i \leq n}\{\min\{i, \deg(x_i) + 1\}\}$.
* Beweis:
  1. Fall, $G$ hat keine Kanten.
     Dann ist $\chi(G) = 1$ und $\deg(x_i) = 0$ für alle Knoten $x_i$.
     Also ist $\max_{1 \leq i \leq n}\{\min\{i, \deg(x_i) + 1\}\} = \max_{1 \leq i \leq n}\{\min\{i, 1\}\} = 1$.
  2. Fall, $G$ hat Kanten.
     Sei $\chi(G) = k$.
     Nach Satz 11 enthält $G$ mindestens $k$ Knoten $v$ mit $\deg_G(v) \geq k-1$.

# Folgerungen aus dem Satz von Dirac

* **Satz 11**:
  Sei $G$ ein Graph mit $\chi(G) = k$. Dann enthält $G$ mindestens $k$ Knoten $v$ mit $\deg(v) \geq k-1$.
* Beweis:
  Sei $H$ ein $k$-kritischer Untergraph von $G$.
  Nach dem Satz von Dirac ist $\deg_H(v) \geq k-1$ für alle Knoten $v$ von $H$.
  Somit ist auch $\deg_G(v) \geq k-1$.
  Da $H$ $k$-chromatisch ist, enthält $H$ mindestens $k$ Knoten.
* **Satz 12** (Welsh, Powell, 1967):
  Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $\deg(x_1) \geq \ldots \geq \deg(x_n)$. Dann gilt $\chi(G) \leq \max_{1 \leq i \leq n}\{\min\{i, \deg(x_i) + 1\}\}$.
* Beweis:
  1. Fall, $G$ hat keine Kanten.
     Dann ist $\chi(G) = 1$ und $\deg(x_i) = 0$ für alle Knoten $x_i$.
     Also ist $\max_{1 \leq i \leq n}\{\min\{i, \deg(x_i) + 1\}\} = \max_{1 \leq i \leq n}\{\min\{i, 1\}\} = 1$.
  2. Fall, $G$ hat Kanten.
     Sei $\chi(G) = k$.
     Nach Satz 11 enthält $G$ mindestens $k$ Knoten $v$ mit $\deg_G(v) \geq k-1$.
     Da wir die Knoten nach Graden sortiert haben, ist $\deg_G(x_i) \geq k-1$ für $i = 1, \ldots, k$.

# Folgerungen aus dem Satz von Dirac

* **Satz 11**:
  Sei $G$ ein Graph mit $\chi(G) = k$. Dann enthält $G$ mindestens $k$ Knoten $v$ mit $\deg(v) \geq k-1$.
* Beweis:
  Sei $H$ ein $k$-kritischer Untergraph von $G$.
  Nach dem Satz von Dirac ist $\deg_H(v) \geq k-1$ für alle Knoten $v$ von $H$.
  Somit ist auch $\deg_G(v) \geq k-1$.
  Da $H$ $k$-chromatisch ist, enthält $H$ mindestens $k$ Knoten.
* **Satz 12** (Welsh, Powell, 1967):
  Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $\deg(x_1) \geq \ldots \geq \deg(x_n)$. Dann gilt $\chi(G) \leq \max_{1 \leq i \leq n}\{\min\{i, \deg(x_i)+1\}\}$.
* Beweis:
  1. Fall, $G$ hat keine Kanten.
     Dann ist $\chi(G) = 1$ und $\deg(x_i) = 0$ für alle Knoten $x_i$.
     Also ist $\max_{1 \leq i \leq n}\{\min\{i, \deg(x_i)+1\}\} = \max_{1 \leq i \leq n}\{\min\{i, 1\}\} = 1$.
  2. Fall, $G$ hat Kanten.
     Sei $\chi(G) = k$.
     Nach Satz 11 enthält $G$ mindestens $k$ Knoten $v$ mit $\deg_G(v) \geq k-1$.
     Da wir die Knoten nach Graden sortiert haben, ist $\deg_G(x_i) \geq k-1$ für $i = 1, \ldots, k$.
     Dann ist $\min\{k, \deg(x_k)+1\} = k$.

# Folgerungen aus dem Satz von Dirac

- **Satz 11**:
  Sei $G$ ein Graph mit $\chi(G) = k$. Dann enthält $G$ mindestens $k$ Knoten $v$ mit $\deg(v) \geq k-1$.
- Beweis:
  - Sei $H$ ein $k$–kritischer Untergraph von $G$.
  - Nach dem Satz von Dirac ist $\deg_H(v) \geq k-1$ für alle Knoten $v$ von $H$.
  - Somit ist auch $\deg_G(v) \geq k-1$.
  - Da $H$ $k$–chromatisch ist, enthält $H$ mindestens $k$ Knoten.
- **Satz 12** (Welsh, Powell, 1967):
  Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $V = \{x_1, \ldots, x_n\}$ und $\deg(x_1) \geq \ldots \geq \deg(x_n)$. Dann gilt $\chi(G) \leq \max_{1 \leq i \leq n}\{\min\{i, \deg(x_i) + 1\}\}$.
- Beweis:
  1. Fall, $G$ hat keine Kanten.
     - Dann ist $\chi(G) = 1$ und $\deg(x_i) = 0$ für alle Knoten $x_i$.
     - Also ist $\max_{1 \leq i \leq n}\{\min\{i, \deg(x_i) + 1\}\} = \max_{1 \leq i \leq n}\{\min\{i, 1\}\} = 1$.
  2. Fall, $G$ hat Kanten.
     - Sei $\chi(G) = k$.
     - Nach Satz 11 enthält $G$ mindestens $k$ Knoten $v$ mit $\deg_G(v) \geq k-1$.
     - Da wir die Knoten nach Graden sortiert haben, ist $\deg_G(x_i) \geq k-1$ für $i = 1, \ldots, k$.
     - Dann ist $\min\{k, \deg(x_k) + 1\} = k$.
     - Also ist $\max_{1 \leq i \leq n}\{\min\{i, \deg(x_i) + 1\}\} \geq k = \chi(G)$.

# Cliquen

# Cliquen

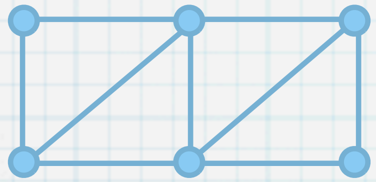
* **Definition 13**:
  Sei $G$ ein Graph. Ein vollständiger Untergraph von $G$ wird als **Clique** von $G$ bezeichnet. Die Anzahl der Knoten in einer größten Clique von $G$ heißt **Cliquenzahl** von $G$ und wird mit $cl(G)$ oder auch $\omega(G)$ bezeichnet.

# Cliquen

* **Definition 13**:
  Sei $G$ ein Graph. Ein vollständiger Untergraph von $G$ wird als **Clique** von $G$ bezeichnet. Die Anzahl der Knoten in einer größten Clique von $G$ heißt **Cliquenzahl** von $G$ und wird mit $cl(G)$ oder auch $\omega(G)$ bezeichnet.
* Beispiele:

# Cliquen

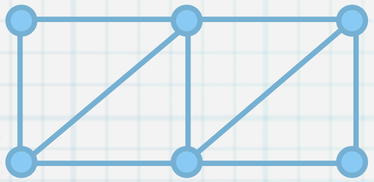
* **Definition 13**:
  Sei $G$ ein Graph. Ein vollständiger Untergraph von $G$ wird als **Clique** von $G$ bezeichnet. Die Anzahl der Knoten in einer größten Clique von $G$ heißt **Cliquenzahl** von $G$ und wird mit $cl(G)$ oder auch $\omega(G)$ bezeichnet.
* Beispiele:



$G_1$

# Cliquen

* **Definition 13**:
  Sei $G$ ein Graph. Ein vollständiger Untergraph von $G$ wird als **Clique** von $G$ bezeichnet. Die Anzahl der Knoten in einer größten Clique von $G$ heißt **Cliquenzahl** von $G$ und wird mit $cl(G)$ oder auch $\omega(G)$ bezeichnet.
* Beispiele:

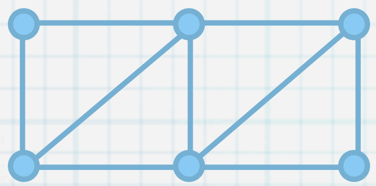


$G_1$

$\boldsymbol{cl(G_1) = 3}$

# Cliquen

* **Definition 13**:
  Sei $G$ ein Graph. Ein vollständiger Untergraph von $G$ wird als **Clique** von $G$ bezeichnet. Die Anzahl der Knoten in einer größten Clique von $G$ heißt **Cliquenzahl** von $G$ und wird mit $cl(G)$ oder auch $\omega(G)$ bezeichnet.
* Beispiele:



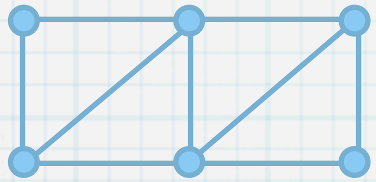
$G_1$

$cl(G_1) = 3$

$G_2$

# Cliquen

- **Definition 13**:
  Sei $G$ ein Graph. Ein vollständiger Untergraph von $G$ wird als **Clique** von $G$ bezeichnet. Die Anzahl der Knoten in einer größten Clique von $G$ heißt **Cliquenzahl** von $G$ und wird mit $cl(G)$ oder auch $\omega(G)$ bezeichnet.
- Beispiele:



$G_1$

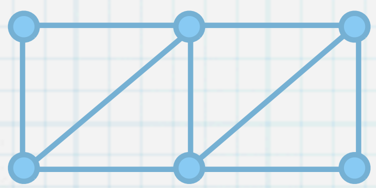
$cl(G_1) = 3$

$G_2$

$cl(G_2) = 2$

# Cliquen

* **Definition 13**:
  Sei $G$ ein Graph. Ein vollständiger Untergraph von $G$ wird als **Clique** von $G$ bezeichnet. Die Anzahl der Knoten in einer größten Clique von $G$ heißt **Cliquenzahl** von $G$ und wird mit $cl(G)$ oder auch $\omega(G)$ bezeichnet.
* Beispiele:

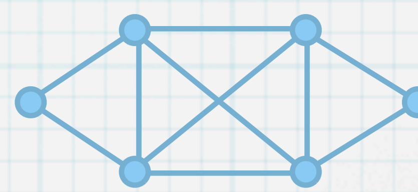


$G_1$

$cl(G_1) = 3$

$G_2$

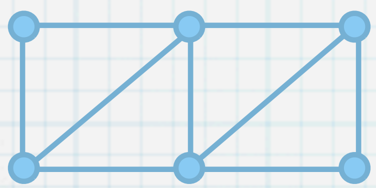
$cl(G_2) = 2$



$G_3$

# Cliquen

- **Definition 13**:
  Sei $G$ ein Graph. Ein vollständiger Untergraph von $G$ wird als **Clique** von $G$ bezeichnet. Die Anzahl der Knoten in einer größten Clique von $G$ heißt **Cliquenzahl** von $G$ und wird mit $cl(G)$ oder auch $\omega(G)$ bezeichnet.
- Beispiele:

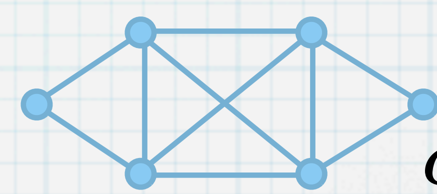


$G_1$

$cl(G_1) = 3$

$G_2$

$cl(G_2) = 2$



$G_3$

$cl(G_3) = 4$

# Der Satz von Mycielski

# Der Satz von Mycielski

* **Satz 14** (Mycielski, 1955):
  Für alle $k \geq 1$ gibt es einen $k$–chromatischen Graphen $M_k$, der keinen Dreikreis $K_3$ als Untergraphen enthält.

# Der Satz von Mycielski

* **Satz 14** (Mycielski, 1955):
  Für alle $k \geq 1$ gibt es einen $k$-chromatischen Graphen $M_k$, der keinen Dreikreis $K_3$ als Untergraphen enthält.
* Beweis (durch Induktion über $k$):

# Der Satz von Mycielski

* **Satz 14** (Mycielski, 1955):
  Für alle $k \geq 1$ gibt es einen $k$-chromatischen Graphen $M_k$, der keinen Dreikreis $K_3$ als Untergraphen enthält.
* Beweis (durch Induktion über $k$):
  Induktionsanfang: Die Aussage stimmt für die Graphen $K_1$ und $K_2$.

# Der Satz von Mycielski

* **Satz 14** (Mycielski, 1955):
  Für alle $k \geq 1$ gibt es einen $k$-chromatischen Graphen $M_k$, der keinen Dreikreis $K_3$ als Untergraphen enthält.
* Beweis (durch Induktion über $k$):
  Induktionsanfang: Die Aussage stimmt für die Graphen $K_1$ und $K_2$.
  Sei die Aussage wahr für $k \geq 2$, d.h. $M_k$ ist ein $k$-chromatischer Graph ohne Dreikreis.

# Der Satz von Mycielski

* **Satz 14** (Mycielski, 1955):
  Für alle $k \geq 1$ gibt es einen $k$–chromatischen Graphen $M_k$, der keinen Dreikreis $K_3$ als Untergraphen enthält.
* Beweis (durch Induktion über $k$):
  Induktionsanfang: Die Aussage stimmt für die Graphen $K_1$ und $K_2$.
  Sei die Aussage wahr für $k \geq 2$, d.h. $M_k$ ist ein $k$–chromatischer Graph ohne Dreikreis.
  Sei $V(M_k) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ die Knotenmenge von $M_k$.

# Der Satz von Mycielski

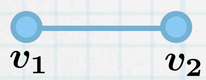
* **Satz 14** (Mycielski, 1955):
  Für alle $k \geq 1$ gibt es einen $k$-chromatischen Graphen $M_k$, der keinen Dreikreis $K_3$ als Untergraphen enthält.
* Beweis (durch Induktion über $k$):
  Induktionsanfang: Die Aussage stimmt für die Graphen $K_1$ und $K_2$.
  Sei die Aussage wahr für $k \geq 2$, d.h. $M_k$ ist ein $k$-chromatischer Graph ohne Dreikreis.
  Sei $V(M_k) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ die Knotenmenge von $M_k$.
  Definiere $M_{k+1}$ durch $V(M_{k+1}) := V(M_k) \cup \{u_1, \ldots, u_n, v\}$ und

# Der Satz von Mycielski

* **Satz 14** (Mycielski, 1955):
  Für alle $k \geq 1$ gibt es einen $k$-chromatischen Graphen $M_k$, der keinen Dreikreis $K_3$ als Untergraphen enthält.
* Beweis (durch Induktion über $k$):
  Induktionsanfang: Die Aussage stimmt für die Graphen $K_1$ und $K_2$.
  Sei die Aussage wahr für $k \geq 2$, d.h. $M_k$ ist ein $k$-chromatischer Graph ohne Dreikreis.
  Sei $V(M_k) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ die Knotenmenge von $M_k$.
  Definiere $M_{k+1}$ durch $V(M_{k+1}) := V(M_k) \cup \{u_1, \ldots, u_n, v\}$ und
  $E(M_{k+1}) := E(M_k) \cup \{\{v, u_i\} : i = 1, \ldots, n\} \cup \{\{u_i, w\} : i = 1, \ldots, n, \{v_i, w\} \in E(M_k)\}$.

# Der Satz von Mycielski

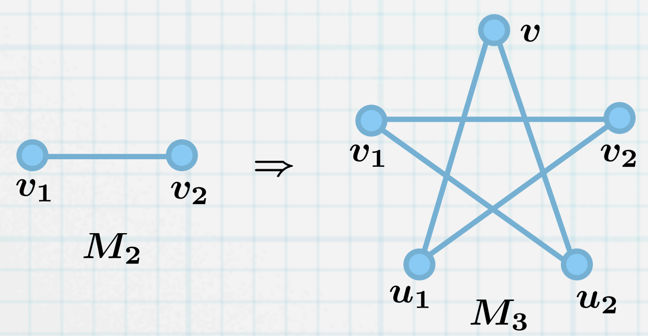
* **Satz 14** (Mycielski, 1955):
  Für alle $k \geq 1$ gibt es einen $k$-chromatischen Graphen $M_k$, der keinen Dreikreis $K_3$ als Untergraphen enthält.
* Beweis (durch Induktion über $k$):
  - Induktionsanfang: Die Aussage stimmt für die Graphen $K_1$ und $K_2$.
  - Sei die Aussage wahr für $k \geq 2$, d.h. $M_k$ ist ein $k$-chromatischer Graph ohne Dreikreis.
  - Sei $V(M_k) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ die Knotenmenge von $M_k$.
  - Definiere $M_{k+1}$ durch $V(M_{k+1}) := V(M_k) \cup \{u_1, \ldots, u_n, v\}$ und
  - $E(M_{k+1}) := E(M_k) \cup \{\{v, u_i\} : i = 1, \ldots, n\} \cup \{\{u_i, w\} : i = 1, \ldots, n, \{v_i, w\} \in E(M_k)\}$.




$M_2$

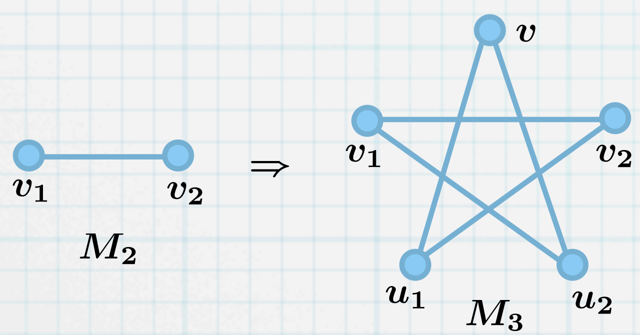
# Der Satz von Mycielski

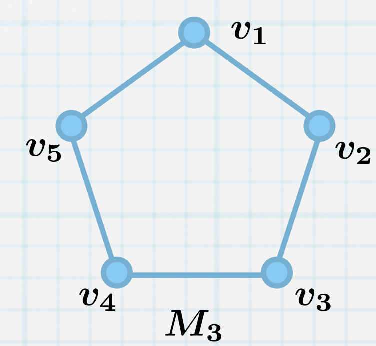
* **Satz 14** (Mycielski, 1955):
  Für alle $k \geq 1$ gibt es einen $k$-chromatischen Graphen $M_k$, der keinen Dreikreis $K_3$ als Untergraphen enthält.
* Beweis (durch Induktion über $k$):
  - Induktionsanfang: Die Aussage stimmt für die Graphen $K_1$ und $K_2$.
  - Sei die Aussage wahr für $k \geq 2$, d.h. $M_k$ ist ein $k$-chromatischer Graph ohne Dreikreis.
  - Sei $V(M_k) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ die Knotenmenge von $M_k$.
  - Definiere $M_{k+1}$ durch $V(M_{k+1}) := V(M_k) \cup \{u_1, \ldots, u_n, v\}$ und
    $E(M_{k+1}) := E(M_k) \cup \{\{v, u_i\} : i = 1, \ldots, n\} \cup \{\{u_i, w\} : i = 1, \ldots, n, \{v_i, w\} \in E(M_k)\}$.



# Der Satz von Mycielski

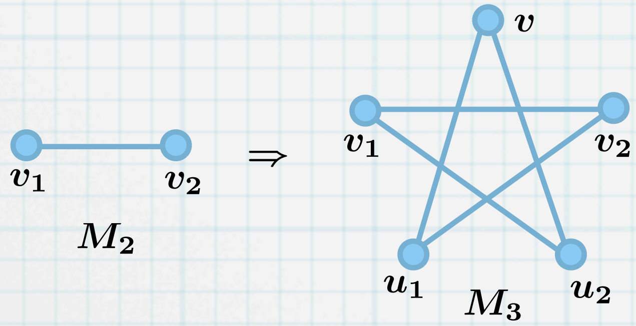
* **Satz 14** (Mycielski, 1955):
  Für alle $k \geq 1$ gibt es einen $k$-chromatischen Graphen $M_k$, der keinen Dreikreis $K_3$ als Untergraphen enthält.
* Beweis (durch Induktion über $k$):
  Induktionsanfang: Die Aussage stimmt für die Graphen $K_1$ und $K_2$.
  Sei die Aussage wahr für $k \geq 2$, d.h. $M_k$ ist ein $k$-chromatischer Graph ohne Dreikreis.
  Sei $V(M_k) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ die Knotenmenge von $M_k$.
  Definiere $M_{k+1}$ durch $V(M_{k+1}) := V(M_k) \cup \{u_1, \ldots, u_n, v\}$ und
  $E(M_{k+1}) := E(M_k) \cup \{\{v, u_i\} : i = 1, \ldots, n\} \cup \{\{u_i, w\} : i = 1, \ldots, n, \{v_i, w\} \in E(M_k)\}$.

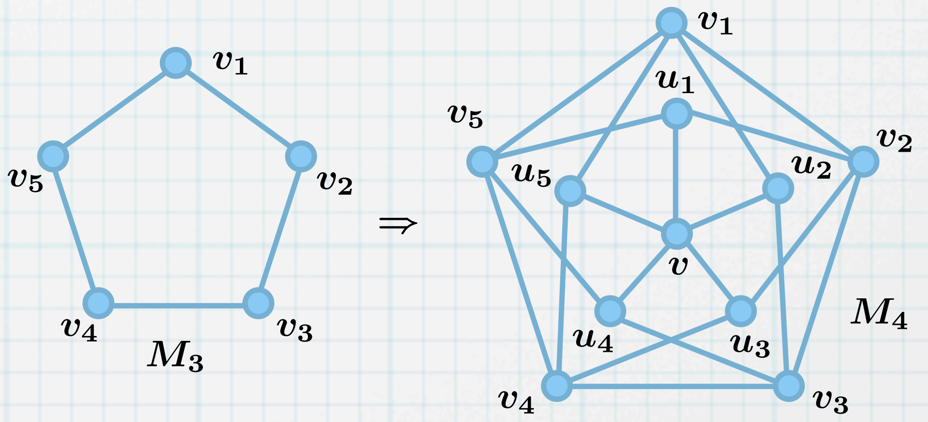


# Der Satz von Mycielski

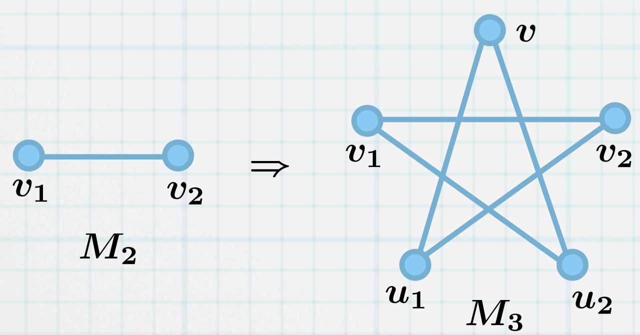
* **Satz 14** (Mycielski, 1955):
  Für alle $k \geq 1$ gibt es einen $k$–chromatischen Graphen $M_k$, der keinen Dreikreis $K_3$ als Untergraphen enthält.
* Beweis (durch Induktion über $k$):
  Induktionsanfang: Die Aussage stimmt für die Graphen $K_1$ und $K_2$.
  Sei die Aussage wahr für $k \geq 2$, d.h. $M_k$ ist ein $k$–chromatischer Graph ohne Dreikreis.
  Sei $V(M_k) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ die Knotenmenge von $M_k$.
  Definiere $M_{k+1}$ durch $V(M_{k+1}) := V(M_k) \cup \{u_1, \ldots, u_n, v\}$ und
  $E(M_{k+1}) := E(M_k) \cup \{\{v, u_i\} : i = 1, \ldots, n\} \cup \{\{u_i, w\} : i = 1, \ldots, n, \{v_i, w\} \in E(M_k)\}$.

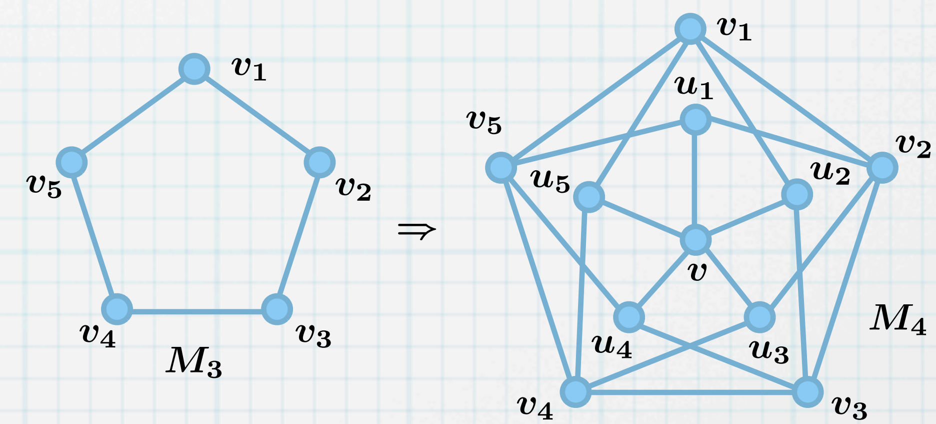


# Der Satz von Mycielski

* **Satz 14** (Mycielski, 1955):
  Für alle $k \geq 1$ gibt es einen $k$-chromatischen Graphen $M_k$, der keinen Dreikreis $K_3$ als Untergraphen enthält.
* Beweis (durch Induktion über $k$):
  Induktionsanfang: Die Aussage stimmt für die Graphen $K_1$ und $K_2$.
  Sei die Aussage wahr für $k \geq 2$, d.h. $M_k$ ist ein $k$-chromatischer Graph ohne Dreikreis.
  Sei $V(M_k) = \{v_1, \dots, v_n\}$ die Knotenmenge von $M_k$.
  Definiere $M_{k+1}$ durch $V(M_{k+1}) := V(M_k) \cup \{u_1, \dots, u_n, v\}$ und
  $E(M_{k+1}) := E(M_k) \cup \{\{v, u_i\} : i = 1, \dots, n\} \cup \{\{u_i, w\} : i = 1, \dots, n, \{v_i, w\} \in E(M_k)\}$.




Angenommen, $M_{k+1}$ enthält einen Dreikreis.

# Der Satz von Mycielski

- **Satz 14** (Mycielski, 1955):
  Für alle $k \geq 1$ gibt es einen $k$-chromatischen Graphen $M_k$, der keinen Dreikreis $K_3$ als Untergraphen enthält.
- Beweis (durch Induktion über $k$):

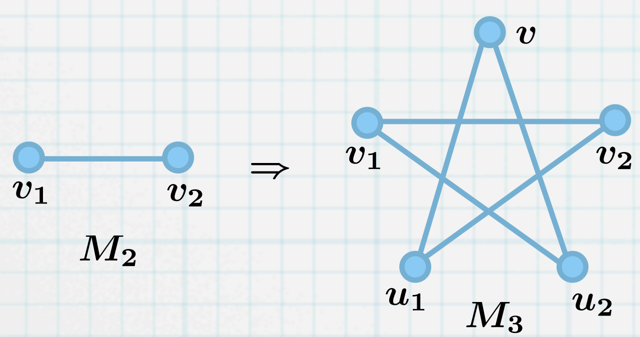
  Induktionsanfang: Die Aussage stimmt für die Graphen $K_1$ und $K_2$.

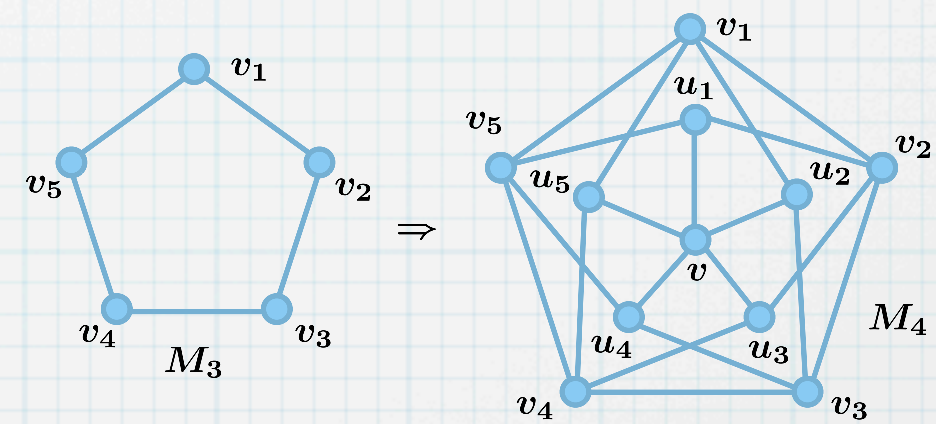
  Sei die Aussage wahr für $k \geq 2$, d.h. $M_k$ ist ein $k$-chromatischer Graph ohne Dreikreis.

  Sei $V(M_k) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ die Knotenmenge von $M_k$.

  Definiere $M_{k+1}$ durch $V(M_{k+1}) := V(M_k) \cup \{u_1, \ldots, u_n, v\}$ und

  $E(M_{k+1}) := E(M_k) \cup \{\{v, u_i\} : i = 1, \ldots, n\} \cup \{\{u_i, w\} : i = 1, \ldots, n, \{v_i, w\} \in E(M_k)\}$.



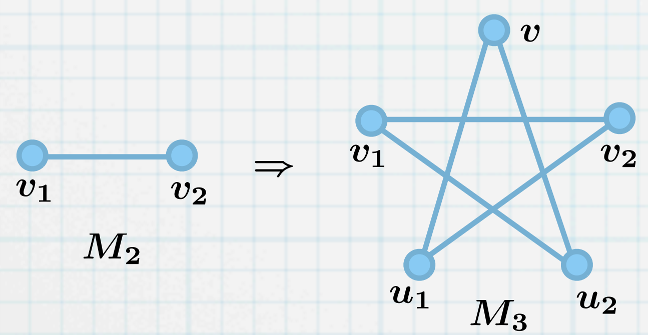



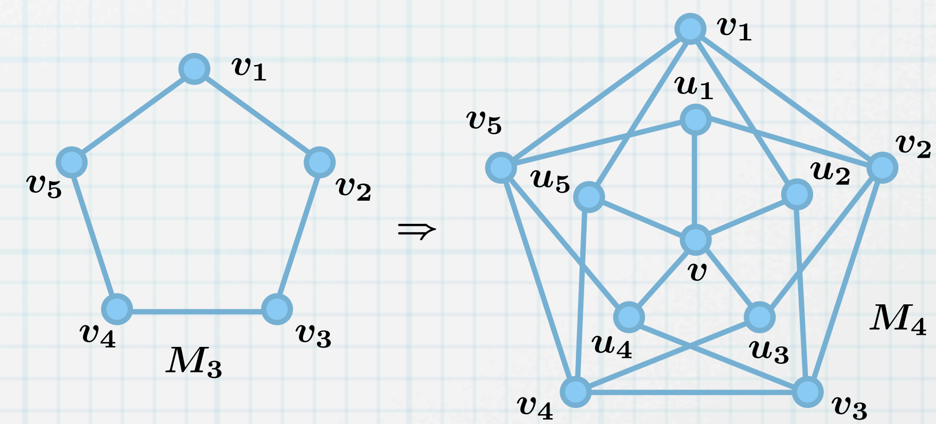

  Angenommen, $M_{k+1}$ enthält einen Dreikreis.

  Da $M_k$ nach Induktionsvoraussetzung keinen Dreikreis enthält, muss dieser mind. einen Knoten aus $\{u_1, \ldots, u_n, v\}$ enthalten.

# Der Satz von Mycielski

* **Satz 14** (Mycielski, 1955):
  Für alle $k \geq 1$ gibt es einen $k$–chromatischen Graphen $M_k$, der keinen Dreikreis $K_3$ als Untergraphen enthält.
* Beweis (durch Induktion über $k$):
  Induktionsanfang: Die Aussage stimmt für die Graphen $K_1$ und $K_2$.
  Sei die Aussage wahr für $k \geq 2$, d.h. $M_k$ ist ein $k$–chromatischer Graph ohne Dreikreis.
  Sei $V(M_k) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ die Knotenmenge von $M_k$.
  Definiere $M_{k+1}$ durch $V(M_{k+1}) := V(M_k) \cup \{u_1, \ldots, u_n, v\}$ und
  $E(M_{k+1}) := E(M_k) \cup \{\{v, u_i\} : i = 1, \ldots, n\} \cup \{\{u_i, w\} : i = 1, \ldots, n, \{v_i, w\} \in E(M_k)\}$.




  Angenommen, $M_{k+1}$ enthält einen Dreikreis.
  Da $M_k$ nach Induktionsvoraussetzung keinen Dreikreis enthält, muss dieser mind. einen Knoten aus $\{u_1, \ldots, u_n, v\}$ enthalten.
  Keine zwei Knoten $u_i, u_j$ sind adjazent.

# Der Satz von Mycielski

- **Satz 14** (Mycielski, 1955):
  Für alle $k \geq 1$ gibt es einen $k$-chromatischen Graphen $M_k$, der keinen Dreikreis $K_3$ als Untergraphen enthält.
- Beweis (durch Induktion über $k$):

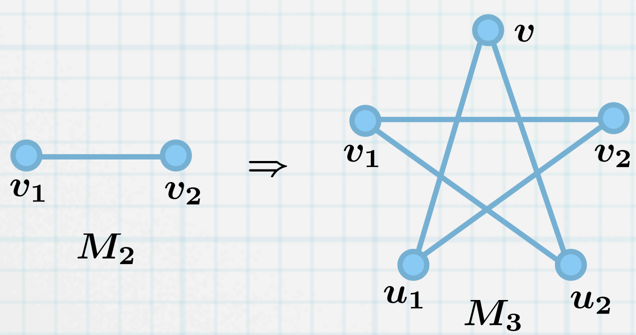
  Induktionsanfang: Die Aussage stimmt für die Graphen $K_1$ und $K_2$.

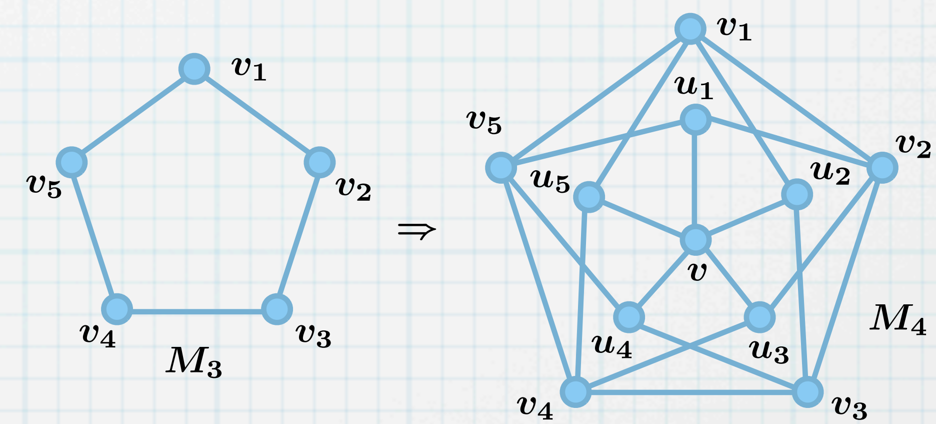
  Sei die Aussage wahr für $k \geq 2$, d.h. $M_k$ ist ein $k$-chromatischer Graph ohne Dreikreis.

  Sei $V(M_k) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ die Knotenmenge von $M_k$.

  Definiere $M_{k+1}$ durch $V(M_{k+1}) := V(M_k) \cup \{u_1, \ldots, u_n, v\}$ und

  $E(M_{k+1}) := E(M_k) \cup \{\{v, u_i\} : i = 1, \ldots, n\} \cup \{\{u_i, w\} : i = 1, \ldots, n, \{v_i, w\} \in E(M_k)\}$.




  Angenommen, $M_{k+1}$ enthält einen Dreikreis.

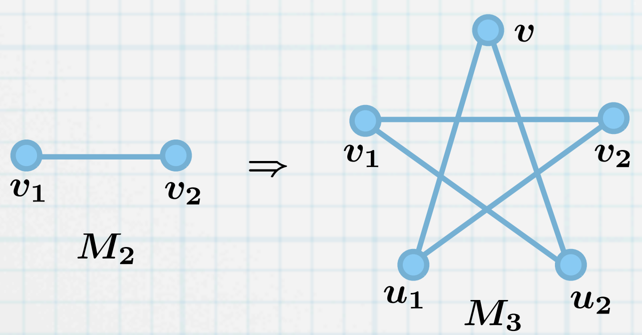
  Da $M_k$ nach Induktionsvoraussetzung keinen Dreikreis enthält, muss dieser mind. einen Knoten aus $\{u_1, \ldots, u_n, v\}$ enthalten.

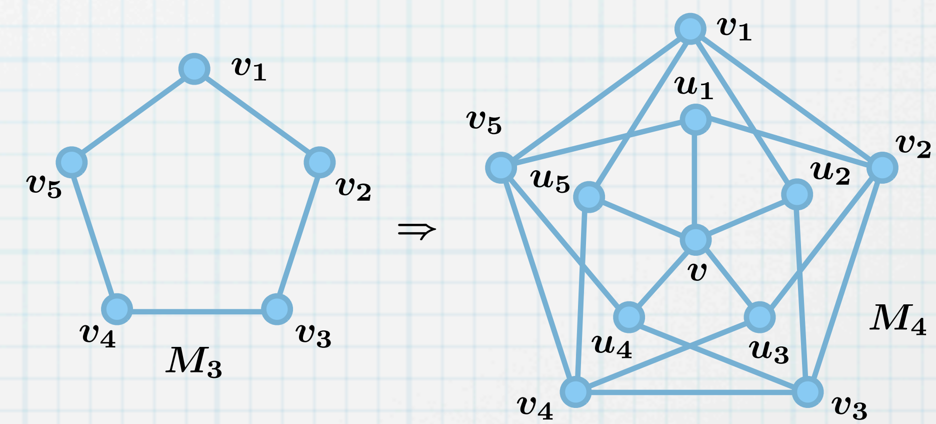
  Keine zwei Knoten $u_i, u_j$ sind adjazent.

  Also hat der Dreikreis die Form $v_j, v_l, u_i, v_j$.

# Der Satz von Mycielski

* **Satz 14** (Mycielski, 1955):
Für alle $k \geq 1$ gibt es einen $k$–chromatischen Graphen $M_k$, der keinen Dreikreis $K_3$ als Untergraphen enthält.
* Beweis (durch Induktion über $k$):
  Induktionsanfang: Die Aussage stimmt für die Graphen $K_1$ und $K_2$.
  Sei die Aussage wahr für $k \geq 2$, d.h. $M_k$ ist ein $k$–chromatischer Graph ohne Dreikreis.
  Sei $V(M_k) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ die Knotenmenge von $M_k$.
  Definiere $M_{k+1}$ durch $V(M_{k+1}) := V(M_k) \cup \{u_1, \ldots, u_n, v\}$ und
  $E(M_{k+1}) := E(M_k) \cup \{\{v, u_i\} : i = 1, \ldots, n\} \cup \{\{u_i, w\} : i = 1, \ldots, n, \{v_i, w\} \in E(M_k)\}$.




  Angenommen, $M_{k+1}$ enthält einen Dreikreis.
  Da $M_k$ nach Induktionsvoraussetzung keinen Dreikreis enthält, muss dieser mind. einen Knoten aus $\{u_1, \ldots, u_n, v\}$ enthalten.
  Keine zwei Knoten $u_i, u_j$ sind adjazent.
  Also hat der Dreikreis die Form $v_j, v_l, u_i, v_j$.
  Nach Definition von $E(M_{k+1})$ gibt es dann Kanten $\{v_l, v_i\}$ und $\{v_i, v_j\}$ in $E(M_k)$.

# Der Satz von Mycielski

- **Satz 14** (Mycielski, 1955):
  Für alle $k \geq 1$ gibt es einen $k$–chromatischen Graphen $M_k$, der keinen Dreikreis $K_3$ als Untergraphen enthält.
- Beweis (durch Induktion über $k$):

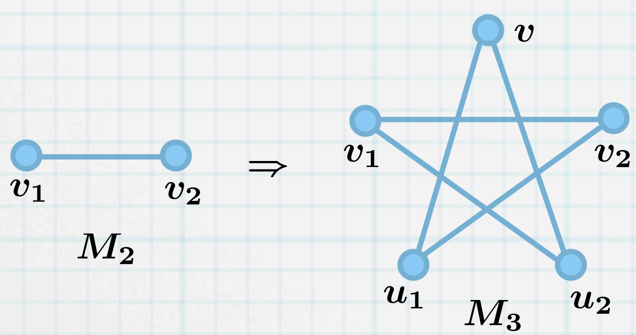
  Induktionsanfang: Die Aussage stimmt für die Graphen $K_1$ und $K_2$.

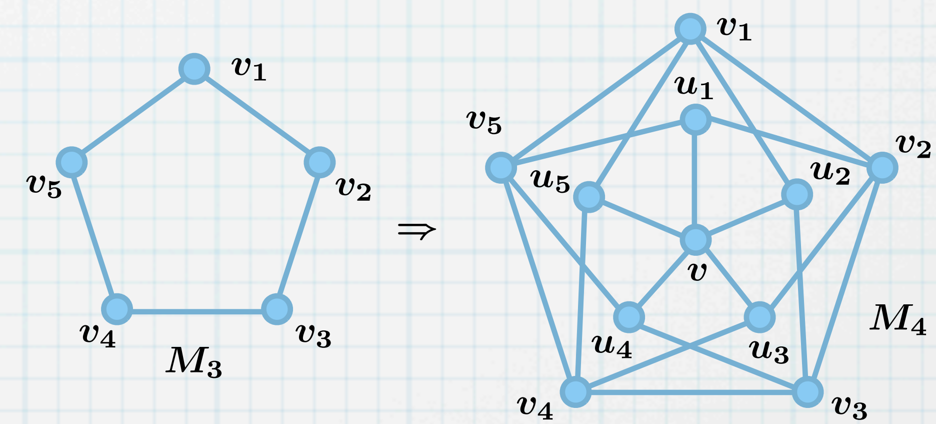
  Sei die Aussage wahr für $k \geq 2$, d.h. $M_k$ ist ein $k$–chromatischer Graph ohne Dreikreis.

  Sei $V(M_k) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ die Knotenmenge von $M_k$.

  Definiere $M_{k+1}$ durch $V(M_{k+1}) := V(M_k) \cup \{u_1, \ldots, u_n, v\}$ und

  $E(M_{k+1}) := E(M_k) \cup \{\{v, u_i\} : i = 1, \ldots, n\} \cup \{\{u_i, w\} : i = 1, \ldots, n, \{v_i, w\} \in E(M_k)\}$.




  Angenommen, $M_{k+1}$ enthält einen Dreikreis.

  Da $M_k$ nach Induktionsvoraussetzung keinen Dreikreis enthält, muss dieser mind. einen Knoten aus $\{u_1, \ldots, u_n, v\}$ enthalten.

  Keine zwei Knoten $u_i, u_j$ sind adjazent.

  Also hat der Dreikreis die Form $v_j, v_l, u_i, v_j$.

  Nach Definition von $E(M_{k+1})$ gibt es dann Kanten $\{v_l, v_i\}$ und $\{v_i, v_j\}$ in $E(M_k)$.

  Dann ist $v_j, v_l, v_i, v_j$ ein Dreikreis in $M_k$, was ein Widerspruch ist.

# Satz von Mycielski (Forts.)

# Satz von Mycielski (Forts.)

* Beweis (Forts.):

# Satz von Mycielski (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  Gegeben sei eine $k$–Färbung von $M_k$ mit den Farben $1, \ldots, k$.

# Satz von Mycielski (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  Gegeben sei eine $k$–Färbung von $M_k$ mit den Farben $1, \ldots, k$.
  Färbe jeden Knoten $u_i$ mit der Farbe von $v_i$ und $v$ mit einer neuen Farbe $k+1$.

# Satz von Mycielski (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  Gegeben sei eine $k$–Färbung von $M_k$ mit den Farben $1, \ldots, k$.
  Färbe jeden Knoten $u_i$ mit der Farbe von $v_i$ und $v$ mit einer neuen Farbe $k+1$.
  Dieses ergibt eine zulässige Färbung. Also ist $\chi(M_{k+1}) \leq k+1$.

# Satz von Mycielski (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  Gegeben sei eine $k$–Färbung von $M_k$ mit den Farben $1, \ldots, k$.
  Färbe jeden Knoten $u_i$ mit der Farbe von $v_i$ und $v$ mit einer neuen Farbe $k+1$.
  Dieses ergibt eine zulässige Färbung. Also ist $\chi(M_{k+1}) \leq k+1$.
  Angenommen, es gibt eine $k$–Färbung von $M_{k+1}$ mit den Farben $1, \ldots, k$.

# Satz von Mycielski (Forts.)

- Beweis (Forts.):
  Gegeben sei eine $k$–Färbung von $M_k$ mit den Farben $1, \ldots, k$.
  Färbe jeden Knoten $u_i$ mit der Farbe von $v_i$ und $v$ mit einer neuen Farbe $k + 1$.
  Dieses ergibt eine zulässige Färbung. Also ist $\chi(M_{k+1}) \leq k + 1$.
  Angenommen, es gibt eine $k$–Färbung von $M_{k+1}$ mit den Farben $1, \ldots, k$.
    Angenommen sei weiter (o.B.d.A.), dass $v$ mit $k$ gefärbt ist.

# Satz von Mycielski (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  Gegeben sei eine $k$–Färbung von $M_k$ mit den Farben $1, \ldots, k$.
  Färbe jeden Knoten $u_i$ mit der Farbe von $v_i$ und $v$ mit einer neuen Farbe $k+1$.
  Dieses ergibt eine zulässige Färbung. Also ist $\chi(M_{k+1}) \leq k+1$.
  Angenommen, es gibt eine $k$–Färbung von $M_{k+1}$ mit den Farben $1, \ldots, k$.
    Angenommen sei weiter (o.B.d.A.), dass $v$ mit $k$ gefärbt ist.
    Da $u_i$ und $v$ adjazent, kann kein Knoten $u_i$ mit $k$ gefärbt sein.

# Satz von Mycielski (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  Gegeben sei eine $k$–Färbung von $M_k$ mit den Farben $1, \ldots, k$.
  Färbe jeden Knoten $u_i$ mit der Farbe von $v_i$ und $v$ mit einer neuen Farbe $k+1$.
  Dieses ergibt eine zulässige Färbung. Also ist $\chi(M_{k+1}) \leq k+1$.
  Angenommen, es gibt eine $k$–Färbung von $M_{k+1}$ mit den Farben $1, \ldots, k$.
    Angenommen sei weiter (o.B.d.A.), dass $v$ mit $k$ gefärbt ist.
    Da $u_i$ und $v$ adjazent, kann kein Knoten $u_i$ mit $k$ gefärbt sein.
    Also wurden dann zur Färbung von $u_1, \ldots, u_n$ nur $k-1$ Farben genutzt.

# Satz von Mycielski (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  Gegeben sei eine $k$–Färbung von $M_k$ mit den Farben $1, \ldots, k$.
  Färbe jeden Knoten $u_i$ mit der Farbe von $v_i$ und $v$ mit einer neuen Farbe $k + 1$.
  Dieses ergibt eine zulässige Färbung. Also ist $\chi(M_{k+1}) \leq k + 1$.
  Angenommen, es gibt eine $k$–Färbung von $M_{k+1}$ mit den Farben $1, \ldots, k$.
    Angenommen sei weiter (o.B.d.A.), dass $v$ mit $k$ gefärbt ist.
    Da $u_i$ und $v$ adjazent, kann kein Knoten $u_i$ mit $k$ gefärbt sein.
    Also wurden dann zur Färbung von $u_1, \ldots, u_n$ nur $k - 1$ Farben genutzt.
    Da $\chi(M_k) = k$, wurde Farbe $k$ auch für einige Knoten aus $v_1, \ldots, v_n$ verwendet.

# Satz von Mycielski (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  Gegeben sei eine $k$–Färbung von $M_k$ mit den Farben $1, \ldots, k$.
  Färbe jeden Knoten $u_i$ mit der Farbe von $v_i$ und $v$ mit einer neuen Farbe $k+1$.
  Dieses ergibt eine zulässige Färbung. Also ist $\chi(M_{k+1}) \leq k+1$.
  Angenommen, es gibt eine $k$–Färbung von $M_{k+1}$ mit den Farben $1, \ldots, k$.
    Angenommen sei weiter (o.B.d.A.), dass $v$ mit $k$ gefärbt ist.
    Da $u_i$ und $v$ adjazent, kann kein Knoten $u_i$ mit $k$ gefärbt sein.
    Also wurden dann zur Färbung von $u_1, \ldots, u_n$ nur $k-1$ Farben genutzt.
    Da $\chi(M_k) = k$, wurde Farbe $k$ auch für einige Knoten aus $v_1, \ldots, v_n$ verwendet.
    Es haben $v_i$ und $u_i$ die gleichen Nachbarn in $M_k$.

# Satz von Mycielski (Forts.)

* Beweis (Forts.):
    Gegeben sei eine $k$–Färbung von $M_k$ mit den Farben $1, \ldots, k$.
    Färbe jeden Knoten $u_i$ mit der Farbe von $v_i$ und $v$ mit einer neuen Farbe $k+1$.
    Dieses ergibt eine zulässige Färbung. Also ist $\chi(M_{k+1}) \leq k+1$.
    Angenommen, es gibt eine $k$–Färbung von $M_{k+1}$ mit den Farben $1, \ldots, k$.
        Angenommen sei weiter (o.B.d.A.), dass $v$ mit $k$ gefärbt ist.
        Da $u_i$ und $v$ adjazent, kann kein Knoten $u_i$ mit $k$ gefärbt sein.
        Also wurden dann zur Färbung von $u_1, \ldots, u_n$ nur $k-1$ Farben genutzt.
        Da $\chi(M_k) = k$, wurde Farbe $k$ auch für einige Knoten aus $v_1, \ldots, v_n$ verwendet.
        Es haben $v_i$ und $u_i$ die gleichen Nachbarn in $M_k$.
        Also können diejenigen Knoten $v_1, \ldots, v_n$ in $M_k$, die mit $k$ gefärbt sind, die Farbe vom jeweiligen Knoten $u_1, \ldots, u_n$ erhalten, unter denen Farbe $k$ nicht vorkommt.

# Satz von Mycielski (Forts.)

* Beweis (Forts.):

  Gegeben sei eine $k$–Färbung von $M_k$ mit den Farben $1, \ldots, k$.

  Färbe jeden Knoten $u_i$ mit der Farbe von $v_i$ und $v$ mit einer neuen Farbe $k+1$.

  Dieses ergibt eine zulässige Färbung. Also ist $\chi(M_{k+1}) \leq k+1$.

  Angenommen, es gibt eine $k$–Färbung von $M_{k+1}$ mit den Farben $1, \ldots, k$.

  Angenommen sei weiter (o.B.d.A.), dass $v$ mit $k$ gefärbt ist.

  Da $u_i$ und $v$ adjazent, kann kein Knoten $u_i$ mit $k$ gefärbt sein.

  Also wurden dann zur Färbung von $u_1, \ldots, u_n$ nur $k-1$ Farben genutzt.

  Da $\chi(M_k) = k$, wurde Farbe $k$ auch für einige Knoten aus $v_1, \ldots, v_n$ verwendet.

  Es haben $v_i$ und $u_i$ die gleichen Nachbarn in $M_k$.

  Also können diejenigen Knoten $v_1, \ldots, v_n$ in $M_k$, die mit $k$ gefärbt sind, die Farbe vom jeweiligen Knoten $u_1, \ldots, u_n$ erhalten, unter denen Farbe $k$ nicht vorkommt.

  Dadurch entsteht eine zulässige Färbung von $M_k$ mit $k-1$ Farben.

# Satz von Mycielski (Forts.)

* Beweis (Forts.):
    Gegeben sei eine $k$–Färbung von $M_k$ mit den Farben $1, \ldots, k$.
    Färbe jeden Knoten $u_i$ mit der Farbe von $v_i$ und $v$ mit einer neuen Farbe $k+1$.
    Dieses ergibt eine zulässige Färbung. Also ist $\chi(M_{k+1}) \leq k+1$.
    Angenommen, es gibt eine $k$–Färbung von $M_{k+1}$ mit den Farben $1, \ldots, k$.
        Angenommen sei weiter (o.B.d.A.), dass $v$ mit $k$ gefärbt ist.
        Da $u_i$ und $v$ adjazent, kann kein Knoten $u_i$ mit $k$ gefärbt sein.
        Also wurden dann zur Färbung von $u_1, \ldots, u_n$ nur $k-1$ Farben genutzt.
        Da $\chi(M_k) = k$, wurde Farbe $k$ auch für einige Knoten aus $v_1, \ldots, v_n$ verwendet.
        Es haben $v_i$ und $u_i$ die gleichen Nachbarn in $M_k$.
        Also können diejenigen Knoten $v_1, \ldots, v_n$ in $M_k$, die mit $k$ gefärbt sind, die Farbe vom jeweiligen Knoten $u_1, \ldots, u_n$ erhalten, unter denen Farbe $k$ nicht vorkommt.
        Dadurch entsteht eine zulässige Färbung von $M_k$ mit $k-1$ Farben.
        Widerspruch, da $\chi(M_k) = k$.

# Satz von Mycielski (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  Gegeben sei eine $k$–Färbung von $M_k$ mit den Farben $1, \dots, k$.
  Färbe jeden Knoten $u_i$ mit der Farbe von $v_i$ und $v$ mit einer neuen Farbe $k+1$.
  Dieses ergibt eine zulässige Färbung. Also ist $\chi(M_{k+1}) \leq k+1$.
  Angenommen, es gibt eine $k$–Färbung von $M_{k+1}$ mit den Farben $1, \dots, k$.
    Angenommen sei weiter (o.B.d.A.), dass $v$ mit $k$ gefärbt ist.
    Da $u_i$ und $v$ adjazent, kann kein Knoten $u_i$ mit $k$ gefärbt sein.
    Also wurden dann zur Färbung von $u_1, \dots, u_n$ nur $k-1$ Farben genutzt.
    Da $\chi(M_k) = k$, wurde Farbe $k$ auch für einige Knoten aus $v_1, \dots, v_n$ verwendet.
    Es haben $v_i$ und $u_i$ die gleichen Nachbarn in $M_k$.
    Also können diejenigen Knoten $v_1, \dots, v_n$ in $M_k$, die mit $k$ gefärbt sind, die Farbe vom jeweiligen Knoten $u_1, \dots, u_n$ erhalten, unter denen Farbe $k$ nicht vorkommt.
    Dadurch entsteht eine zulässige Färbung von $M_k$ mit $k-1$ Farben.
    Widerspruch, da $\chi(M_k) = k$.
  Also ist $\chi(M_{k+1}) = k+1$.

# Literaturquellen

# Literaturquellen


* J. Clark, D.A. Holton: **Graphentheorie**, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1994. (Kapitel 6, Seite 209–250)

# Literaturquellen


* J. Clark, D.A. Holton: **Graphentheorie**, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1994. (Kapitel 6, Seite 209–250)
* D. Jungnickel: **Graphen, Netzwerke und Algorithmen**, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1994. (Kapitel 8, Seite 299–314)

# Literaturquellen


* J. Clark, D.A. Holton: **Graphentheorie**, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1994. (Kapitel 6, Seite 209–250)
* D. Jungnickel: **Graphen, Netzwerke und Algorithmen**, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1994. (Kapitel 8, Seite 299–314)
* B. Korte, J. Vygen: **Combinatorial Optimization – Theory and Algorithms**, 2nd Edition, Springer Verlag, Berlin, 2001. (Kapitel 16.2, Seite 367–373)

# Literaturquellen


* J. Clark, D.A. Holton: **Graphentheorie**, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1994. (Kapitel 6, Seite 209–250)
* D. Jungnickel: **Graphen, Netzwerke und Algorithmen**, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1994. (Kapitel 8, Seite 299–314)
* B. Korte, J. Vygen: **Combinatorial Optimization – Theory and Algorithms**, 2nd Edition, Springer Verlag, Berlin, 2001. (Kapitel 16.2, Seite 367–373)
* S. Krumke, H. Noltemeier: **Graphentheoretische Konzepte und Algorithmen**, Teubner Verlag, Wiesbaden, 2005. (Kapitel 4, Seite 55–78)

# Literaturquellen


* J. Clark, D.A. Holton: **Graphentheorie**, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1994. (Kapitel 6, Seite 209–250)
* D. Jungnickel: **Graphen, Netzwerke und Algorithmen**, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1994. (Kapitel 8, Seite 299–314)
* B. Korte, J. Vygen: **Combinatorial Optimization – Theory and Algorithms**, 2nd Edition, Springer Verlag, Berlin, 2001. (Kapitel 16.2, Seite 367–373)
* S. Krumke, H. Noltemeier: **Graphentheoretische Konzepte und Algorithmen**, Teubner Verlag, Wiesbaden, 2005. (Kapitel 4, Seite 55–78)
* J.A. Bondy, U.S.R. Murty: **Graph Theory**, Springer Verlag, 2007. (Kapitel 14, Seite 357–390)