

Graphen und Algorithmen

Vorlesung #5: Graphenzusammenhang

Dr. Armin Fügenschuh

Technische Universität Darmstadt

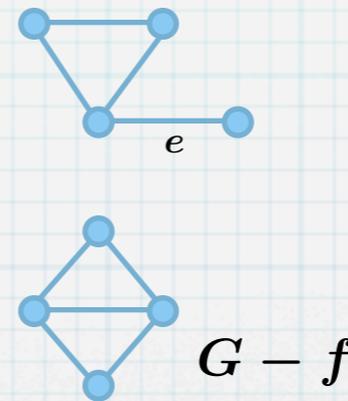
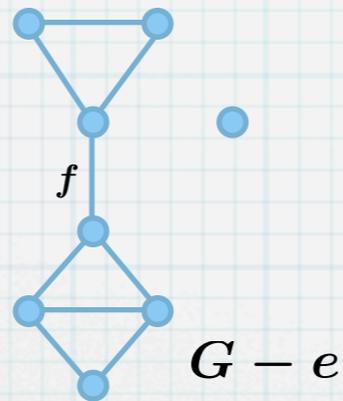
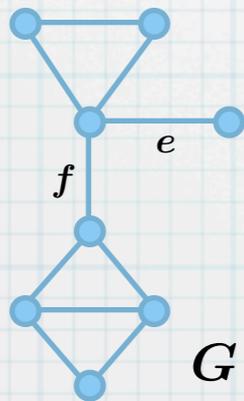
WS 2007/2008

Übersicht

- * Definitionen (Brücke, Zerlegungsknoten, mehrfacher Knoten- und Kantenzusammenhang)
- * Satz von Whitney
- * Satz von Menger in der Knoten- und Kantenversion
- * Verallgemeinerter Satz von Whitney (Knoten- und Kantenversion)

Brücken

- * **Definition 1:**
Die Anzahl der Zusammenhangskomponenten in einem Graphen G wird mit $\omega(G)$ bezeichnet.
- * **Satz 2:**
Sei e eine Kante im Graphen G und sei $G - e$ der Untergraph von G , der durch das Entfernen von e entsteht. Dann gilt $\omega(G) \leq \omega(G - e) \leq \omega(G) + 1$.
- * Beweis: Übung.
- * **Definition 3:**
Eine Kante e eines Graphen G heißt **Brücke** (oder **Isthmus**), wenn der Untergraph $G - e$ mehr Zusammenhangskomponenten hat als G .
- * Bemerkung: Nach Satz 2 ist dann $\omega(G) < \omega(G - e) = \omega(G) + 1$, also hat $G - e$ genau eine Komponente mehr als G .
- * Beispiel: Graph mit Brücken e und f sowie die Graphen $G - e$ bzw. $G - f$.

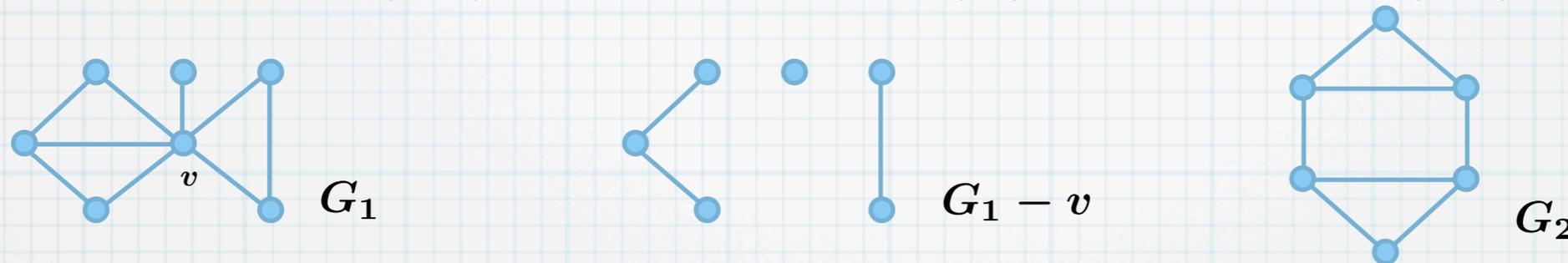


Zerlegungsknoten

* **Definition 4:**

Ein Knoten v eines Graphen G heißt **Zerlegungsknoten** (oder **Artikulation**) von G , wenn $\omega(G) < \omega(G - v)$, wobei $G - v$ der Untergraph von G ist, der durch Entfernen von v und aller mit v inzidenten Kanten aus G entsteht.

* Beispiele: v ist Zerlegungsknoten in G_1 , wohingegen G_2 keine Zerlegungsknoten hat.



* Zerlegungsknoten können durch die Verwendung von Wegen charakterisiert werden.

* **Satz 5:**

Sei v ein Knoten des zusammenhängenden Graphen G . Es ist v genau dann ein Zerlegungsknoten von G , wenn es zwei Knoten $u, w \in V \setminus \{v\}$ gibt, so dass v in jedem u - w -Weg in G enthalten ist.

* Beweis: Übung.

* Allerdings kann nicht jeder Knoten ein Zerlegungsknoten sein.

* **Satz 6:**

Es sei G ein Graph mit mindestens 2 Knoten. Dann enthält G mindestens 2 Knoten, die keine Zerlegungsknoten sind.

* Beweis: Übung.

* **Lemma 7:**

Sei G ein zusammenhängender Graph mit mindestens 3 Knoten. Wenn G eine Brücke enthält, dann enthält G (mind.) einen Zerlegungsknoten.

* Beweis: Übung.

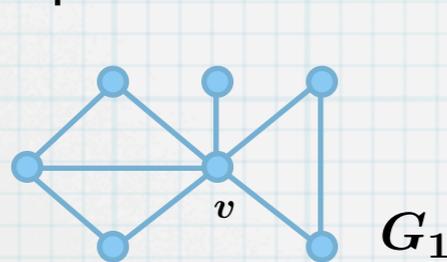
Zusammenhangszahl

- * Ein zusammenhängender Graph mit einem Zerlegungsknoten v ist bei v „verwundbar“.
- * Hat ein Graph keine Zerlegungsknoten, dann ist sein Zusammenhang nicht durch die Entfernung eines seiner Knoten gefährdet.
- * Die folgende Definition liefert ein Maß für diese „Verwundbarkeit“.

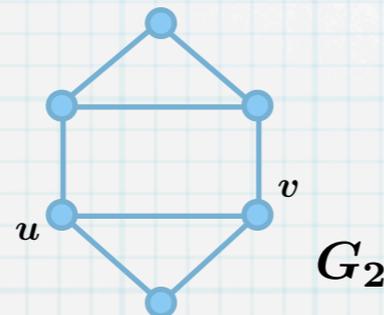
Definition 8:

Sei G ein schlichter Graph. Die (Knoten-) **Zusammenhangszahl** $\kappa(G)$ ist definiert als die kleinste Anzahl von Knoten in G , deren Entfernung aus G entweder einen nichtzusammenhängenden Graphen oder K_1 hinterlässt.

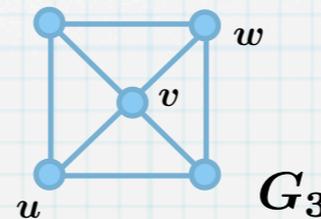
- * Beispiele:



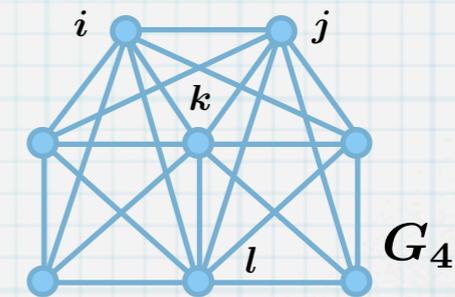
$$\kappa(G_1) = 1$$



$$\kappa(G_2) = 2$$



$$\kappa(G_3) = 3$$



$$\kappa(G_4) = 4$$

- * Bemerkungen:

- * Für $n \geq 2$ führt die Löschung eines Knotens aus K_n zu K_{n-1} . Die Entfernung von t Knoten ($t < n$) führt zu K_{n-t} . Daher gilt $\kappa(K_n) = n - 1$.
- * Für einen zusammenhängenden Graphen G gilt $\kappa(G) = 1$ genau dann, wenn entweder $G = K_2$ oder G einen Zerlegungsknoten enthält.
- * $\kappa(G) = 0$ gilt genau dann, wenn $G = K_1$ oder G unzusammenhängend ist.

Mehrfacher Zusammenhang und disjunkte Wege

* Definition 9:

Ein schlichter Graph G heißt k -fach zusammenhängend (wobei $k \geq 1$), wenn $\kappa(G) \geq k$.

* Bemerkungen:

* G ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn G zusammenhängend ist und mindestens zwei Knoten enthält.

* G ist genau dann zweifach zusammenhängend, wenn G zusammenhängend ist und mindestens drei Knoten enthält, welche aber keine Zerlegungsknoten sind.

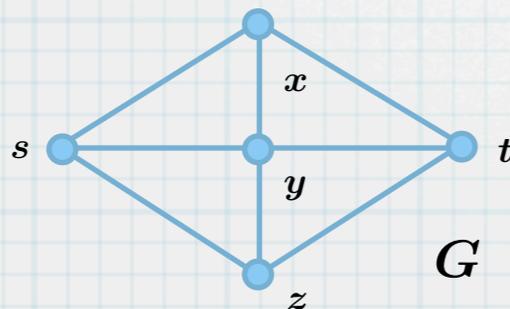
* Ist G k -fach zusammenhängend und ist e eine Kante in G , so ist $G - e$ i.A. nur $(k - 1)$ -fach zusammenhängend.

Angenommen, $G - e$ wäre nicht mehr $(k - 1)$ -fach zusammenhängend.

Dann gibt es $k - 2$ Knoten in $S \subset V(G - e)$, so dass $(G - e) - S$ unzusammenhängend bzw. K_1 wird.

Sei $e = \{u, v\}$. Dann ist $S' := S \cup \{u\}$ eine Menge mit höchstens $k - 1$ Knoten, so dass $G - S'$ unzusammenhängend ist. Also ist G nicht k -fach zusammenhängend.

Beispiel: G ist 3-fach zusammenhängend. Entfernt man z.B. $e = \{s, y\}$, so ist $G - e$ nur noch zweifach zusammenhängend.



* Definition 10:

Sei G ein Graph und u, v zwei Knoten. Eine Menge von u - v -Wegen $\{P_1, \dots, P_n\}$ wird als **innerlich disjunkt** bezeichnet, wenn für jedes Paar P_i, P_j aus dieser Menge u und v die einzigen gemeinsamen Knoten von P_i, P_j sind.

Satz von Whitney



* **Satz 11** (Whitney, 1932):

Sei G ein schlichter Graph mit mindestens 3 Knoten. Dann ist G genau dann zweifach zusammenhängend, wenn es für jedes Paar unterschiedlicher Knoten u und v von G zwei innerlich disjunkte u - v -Wege gibt.

* Beweis:

(\Leftarrow): Für jedes Knotenpaar u, v gebe es zwei innerlich disjunkte u - v -Wege.

Dann ist G zusammenhängend.

Bleibt zu zeigen: es gibt keine Zerlegungsknoten in G .

Angenommen, w ist Zerlegungsknoten.

Nach Satz 5 gibt es dann zwei weitere Knoten u, v ($u \neq v$), so dass w in jedem u - v -Weg enthalten ist.

Nach Annahme gibt es jedoch zwei innerlich disjunkte u - v -Wege.

Also kann w in einem der beiden Wege nicht enthalten sein.

Somit ist w nicht in jedem u - v -Weg. Widerspruch.

(\Rightarrow): Sei G zweifach zusammenhängend.

Seien u und v zwei Knoten von G .

Beweise durch vollständige Induktion nach $d(u, v)$, der Entfernung von u und v , dass es zwei innerlich disjunkte u - v -Wege in G gibt.

Induktionsanfang, $d(u, v) = 1$.

Dann sind u und v durch eine Kante $e = \{u, v\}$ verbunden.

Da G keine Zerlegungsknoten enthält, ist e nach Satz 7 keine Brücke.

Somit gibt es einen u - v -Weg P , der nicht identisch mit Weg e , insbesondere innerlich disjunkt zu e , ist.

Satz von Whitney (Forts.)

* Beweis (Forts.):

(\Rightarrow): Sei nun $d(u, v) = k \geq 2$.

Für alle Knotenpaare x, y mit $d(x, y) < k$ gebe es zwei innerlich disjunkte Wege.

Sei P ein Weg der Länge k von u nach v .

Zu zeigen ist: es gibt noch einen weiteren, innerlich disjunkten u - v -Weg.

Sei w der vorletzte Knoten in P (vor v). Dann ist $d(u, w) = k - 1$.

Nach Induktionsannahme gibt es daher zwei innerlich disjunkte u - w -Wege Q_1, Q_2 .

Da G zweifach zusammenhängend ist, ist insbesondere w kein Zerlegungsknoten.

Also ist $G - w$ zusammenhängend.

Es gibt daher einen u - v -Weg P' , der nicht durch w verläuft.

Sei x der letzte Knoten von P' , der auch in Q_1 oder in Q_2 enthalten ist. Einen solchen Knoten gibt es, da zumindest der Endknoten u in allen drei Wegen P', Q_1, Q_2 ist.

O.B.d.A. sei x in Q_1 .

Sei P_1 der u - v -Weg, der durch den u - x -Abschnitt von Q_1 und den x - v -Abschnitt von P' definiert wird.

Sei P_2 der u - v -Weg, der durch den u - w -Weg Q_2 und die Kante $\{w, v\}$ definiert wird.

Aufgrund den Definitionen von Q_1, Q_2, x und P' sind die Wege P_1, P_2 dann innerlich disjunkt.

* **Korollar 12:**

Seien u, v Knoten eines zweifach zusammenhängenden Graphen G . Dann gibt es einen Kreis K in G , der durch beide Knoten verläuft.

* Beweis:

Seien P_1, P_2 zwei innerlich disjunkte u - v -Wege (diese existieren nach Satz 11).

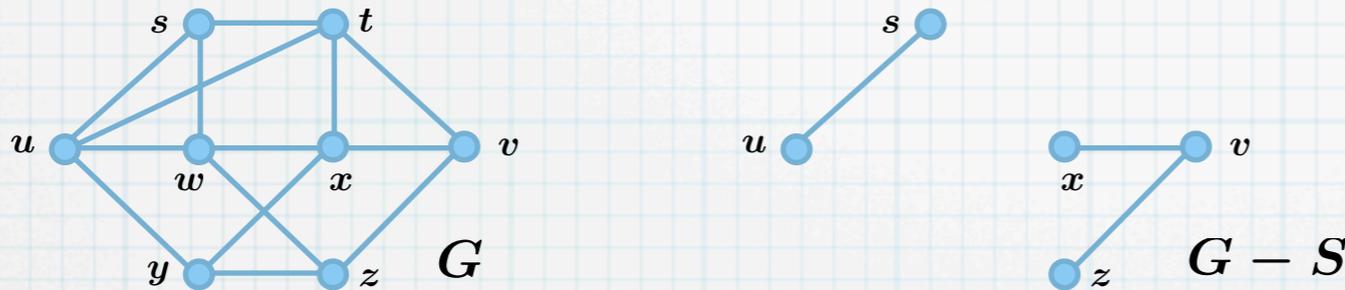
Dann ist $P_1 \cup P_2$ ein Kreis K , der beide Knoten u, v enthält.

Trennende Knoten- und Kantenmengen

* **Definition 13:**

Seien u und v zwei unterschiedliche Knoten eines Graphen $G = (V, E)$. Eine Knotenteilmenge $S \subseteq V \setminus \{u, v\}$ heißt u - v -**trennend**, wenn der knotengelöschte Untergraph $G - S$ nichtzusammenhängend ist und u und v in unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten liegen. Man sagt, S **trennt** u von v .

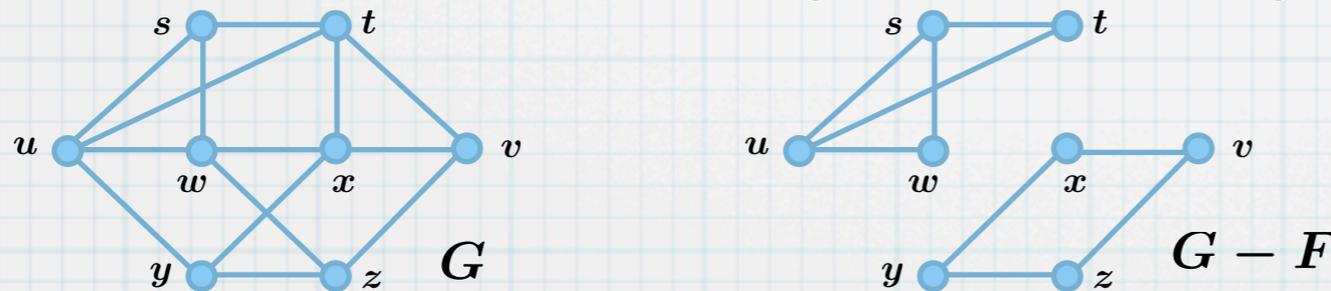
* Beispiel: Die Knotenmenge $S = \{t, w, y\}$ ist u - v -trennend.



* **Definition 14:**

Für zwei verschiedene Knoten u, v heißt eine Kantenmenge $F \subseteq E$ des Graphen $G = (V, E)$ u - v -**trennend**, wenn $G - F$ nichtzusammenhängend ist und u und v in unterschiedlichen Komponenten liegen. Man sagt, F **trennt** u von v .

* Beispiel: Die Kantenmenge $F = \{tv, tx, wx, wz, uy\}$ ist u - v -trennend.



Charakterisierung trennender Mengen

* **Satz 15:**

Seien u und v zwei verschiedene Knoten des Graphen $G = (V, E)$.

- (a) Eine Knotenteilmenge $S \subseteq V \setminus \{u, v\}$ ist genau dann u - v -trennend, wenn jeder u - v -Weg mindestens einen inneren Knoten enthält, der S angehört.
- (b) Eine Kantenteilmenge F von E ist dann und nur dann u - v -trennend, wenn jeder u - v -Weg mindestens eine Kante enthält, die F angehört.

* Beweis: Übung.

Der Satz von Menger (Knotenversion)



* **Satz 16** (Menger, 1927):
Seien s und t zwei nichtadjazente Knoten eines Graphen G . Dann ist die maximale Anzahl paarweise disjunkter $s-t$ -Wege m gleich der minimalen Anzahl von Knoten einer $s-t$ -trennenden Menge n .

* Beweis (Dantzig, Fulkerson, 1956):

Seien P_1, \dots, P_m paarweise innerlich disjunkte $s-t$ -Wege.

Sei S eine $s-t$ -trennende Knotenteilmenge.

Nach Satz 15a) beinhaltet jeder der Wege P_1, \dots, P_m (mind.) ein Element von S .

Da die Wege paarweise innerlich disjunkt sind, kann kein Element von S in mehr als einem Weg als innerer Knoten vorkommen.

Also gibt es mindestens so viele Knoten in S wie es Wege gibt, d.h. $|S| \geq m$.

Da dieses für jede $s-t$ -trennende Menge gilt, ist es insbesondere für diejenige mit minimaler Anzahl Knoten richtig.

Somit haben wir gezeigt: $m \leq n$. Bleibt zu zeigen: $m \geq n$.

Konstruiere dazu ein Flussnetz (D, u, s, t) aus G . Beispiel:

$V(D)$ besteht aus

s und t und

x_1, x_2 für alle Knoten $x \in V(G) \setminus \{s, t\}$.

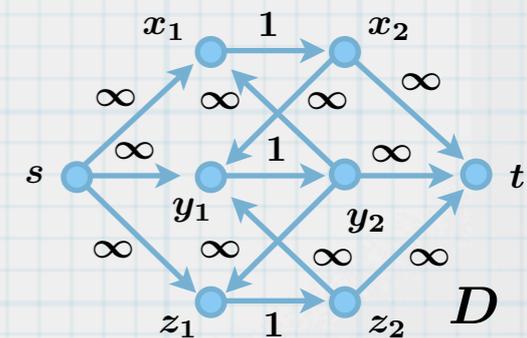
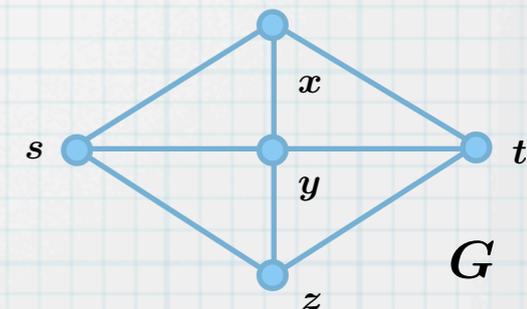
$A(D)$ besteht aus

inneren Bögen (x_1, x_2) mit $u_{x_1, x_2} = 1$ für alle $x \in V(G) \setminus \{s, t\}$,

Bogen (s, x_1) mit $u_{s, x_1} = \infty$ für alle $x \in V(G) \setminus \{s, t\}$,

Bogen (x_2, t) mit $u_{x_2, t} = \infty$ für alle $x \in V(G) \setminus \{s, t\}$ und

Bögen $(x_2, y_1), (y_2, x_1)$ mit $u_{x_2, y_1} = u_{y_2, x_1} = \infty$ für alle $\{x, y\} \in E(G), x, y \notin \{s, t\}$.



Satz von Menger (Forts.)

* Beweis (Forts.):

Sei d der Wert eines maximalen Flusses f in (D, u, s, t) .

Wir zeigen zunächst, dass $d = m$.

Jeder Knoten x_1 (für $x \in V(G) \setminus \{s, t\}$) ist Anfangsknoten genau eines Bogens. Dieses ist der innere Bogen (x_1, x_2) mit Kapazität 1.

Jeder Knoten x_2 (für $x \in V(G) \setminus \{s, t\}$) ist Endknoten genau eines Bogens. Auch dieses ist der innere Bogen (x_1, x_2) mit Kapazität 1.

Jeder $s-t$ -Weg muss über (mindestens einen) Bogen (x_1, x_2) .

Ein maximaler Fluss mit Wert d in (D, u, s, t) kann daher nur aus d paarweise innerlich disjunkten $s-t$ -Wegen in D bestehen, von denen jeder den Wert 1 zum Flusswert beiträgt.

Ein $s-t$ -Weg $P = (s, x, y, \dots, t)$ in G entspricht genau einem $s-t$ -Weg $Q = (s, x_1, x_2, y_1, y_2, \dots, t)$ in D und umgekehrt.

Eine Menge von Wegen in G ist genau dann paarweise innerlich disjunkt, wenn die zugehörigen Wege in D es auch sind. Also ist $d \leq m$.

m innerlich disjunkte Wege induzieren einen Fluss mit Wert m . Also ist $m \leq d$.

Nach dem Max-Flow-Min-Cut-Theorem gibt es einen Schnitt S_X in D (mit $X \subseteq V(D)$), so dass $u(S_X) = d$.

Da d endlich ist, besteht $S_X = \{(i, j) \in A(D) : i \in X, j \notin X\}$ aus genau d inneren Bögen.

Da S_X ein Schnitt ist, muss jeder $s-t$ -Weg (mind.) einen der Bögen in S_X nutzen.

Löscht man die Anfangsknoten x_1, y_1, \dots der Bögen in S_X , so werden alle gerichteten $s-t$ -Wege in D entfernt.

Löscht man die zugehörigen Knoten x, y, \dots in G , so gibt es auch in G keine $s-t$ -Wege mehr. Wir haben eine $s-t$ -trennende Knotenteilmenge $S \subseteq V(G) \setminus \{s, t\}$ gefunden.

Damit ist $d \geq n$. Da $d = m$ und $m \leq n$, folgt $m = n$.

Verallgemeinerter Satz von Whitney

* **Satz 17:**

Ein schlichter Graph ist genau dann n -fach zusammenhängend, wenn für jedes Knotenpaar u, v von G , $u \neq v$, mindestens n paarweise innerlich disjunkte u - v -Wege existieren.

* **Beweis:**

(\Rightarrow) Sei G n -fach zusammenhängend und seien u, v zwei Knoten in G mit $u \neq v$.

1. Fall, u und v sind nicht adjazent.

Sei S eine u - v -trennende Knotenmenge. S enthält mindestens n Knoten.

Nach Menger gibt es mindestens n paarweise innerlich disjunkte u - v -Wege.

2. Fall, u und v sind adjazent, $e = \{u, v\}$.

Sei $G' := G - e$. In G' sind u und v nicht mehr adjazent.

G' ist $(n - 1)$ -fach zusammenhängend.

Eine u - v -trennende Menge in G' hat mindestens $n - 1$ Knoten.

Nach Menger gibt es mind. $n - 1$ paarweise innerlich disjunkte u - v -Wege in G' .

Diese $n - 1$ Wege gibt es auch in G . Der n -te Weg, paarweise disjunkt zu allen anderen, ist die Kante e von u nach v .

(\Leftarrow) Für alle u, v mit $u \neq v$ gebe es mind. n paarweise innerlich disjunkte u - v -Wege.

1. Fall, u und v sind nicht adjazent.

Dann müssen mind. n Knoten gelöscht werden, um diese Wege zu unterbrechen.

2. Fall, u und v sind adjazent, $e = \{u, v\}$.

Dann müssen mind. $n - 1$ Knoten aus den anderen Wegen ($\neq e$) gelöscht werden.

Da der Restgraph u.U. immer noch zusammenhängend ist, muss auch noch u oder v gelöscht werden, damit ein unzusammenhängender Graph oder K_1 entsteht.

Also ist G n -fach zusammenhängend.

Menger, Whitney & Kantenzusammenhang

- * **Satz 18** (Kantenversion des Satzes von Menger):
Seien u und v zwei Knoten eines Graphen G . Dann ist die maximale Anzahl paarweise kantendisjunkter u - v -Wege in G genauso groß wie die minimale Anzahl von Kanten einer u - v -trennenden Menge.

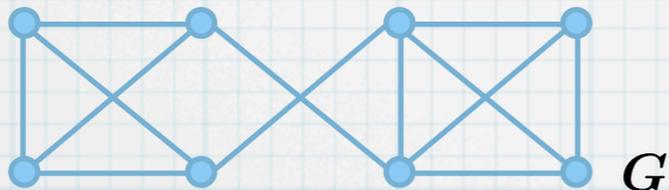
- * Beweis: Übung.

- * **Definition 19:**

Sei G ein schlichter Graph. Die **Kantenzusammenhangszahl** $\kappa_e(G)$ ist die kleinste Anzahl von Kanten in G , deren Entfernen zu einem unzusammenhängenden Graphen oder einem **leeren Graphen** (d.h. ein Graph ohne Kanten) führt.

- * Beispiele:

- * Für einen unzusammenhängenden oder leeren Graphen G gilt $\kappa_e(G) = 0$.
- * Für einen Graphen mit einer Brücke ist $\kappa_e(G) = 1$.
- * Für den unten abgebildeten Graphen G ist $\kappa_e(G) = 2$.



- * **Definition 20:**

Ein schlichter Graph G heißt **k -fach kantenzusammenhängend** ($k \geq 1$), wenn $\kappa_e(G) \geq k$ ist.

- * **Satz 21** (Kantenversion des verallgemeinerten Satzes von Whitney):

Ein schlichter Graph G ist dann und nur dann n -fach kantenzusammenhängend, wenn es für jedes Knotenpaar u, v mit $u \neq v$ mindestens n paarweise verschiedene kantendisjunkte Wege von u nach v gibt.

- * Beweis: Übung.

Beziehung zwischen Knoten- und Kantenzusammenhang

* **Satz 22:**

Sei G ein schlichter Graph und $\delta(G) := \min\{\deg(v) : v \in G\}$. Dann ist $\kappa(G) \leq \kappa_e(G) \leq \delta(G)$.

* **Beweis:**

Sei v ein Knoten mit $\deg(v) = \delta(G) \geq 0$.

Nach Entfernen der $\delta(G)$ mit v inzidenten Kanten ist G unzusammenhängend oder leer.

Danach ist v ein isolierter Knoten. Also ist $\kappa_e(G) \leq \delta(G)$.

1. Fall, $\kappa_e(G) = 0$. Dann ist G nichtzusammenhängend oder leer. Also ist $\kappa(G) = 0$.

2. Fall, $\kappa_e(G) = 1$. Dann ist G zusammenhängend und hat eine Brücke $e = \{u, v\}$.

Nach Lemma 7 ist entweder $G = K_2$ oder G hat einen Zerlegungsknoten (u oder v).

In beiden Fällen ist $\kappa(G) = 1$.

3. Fall, $k := \kappa_e(G) \geq 2$.

Dann gibt es eine Kantenmenge $F := \{e_1, \dots, e_k\}$, so dass $G - F$ unzusammenhängend ist, aber keine kleinere Kantenmenge dieses schafft.

Entfernen wir nur $F' := \{e_1, \dots, e_{k-1}\}$, so ist $G' := G - F'$ noch zusammenhängend.

$e_k = \{u, v\}$ ist Brücke in G' .

Für jedes i in $\{1, \dots, k-1\}$ wähle einen Endknoten u_i von Kante e_i , so dass $u_i \notin \{u, u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_{k-1}\}$. Dieses ist möglich, da G schlicht ist.

Sei $H := G - \{u_1, \dots, u_{k-1}\}$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall, H ist unzusammenhängend. Dann ist $\kappa(G) \leq k-1 < k = \kappa_e(G)$.

2. Fall, H ist zusammenhängend.

H ist Untergraph von G' und $e_k = \{u, v\}$ ist Brücke in H .

Nach Lemma 7 ist $H = K_2$ oder H hat einen Zerlegungsknoten (u oder v).

Löscht man also einen weiteren Knoten in H , so erhält man K_1 oder einen unzusammenhängenden Graphen. Also ist $\kappa(G) \leq k = \kappa_e(G)$.

Literaturquellen

- * J. Clark, D.A. Holton, **Graphentheorie**, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1994. (Kapitel 2&8, Seite 51–92 & 287–320)
- * D. Jungnickel: Graphen, **Netzwerke und Algorithmen**, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1994. (Kapitel 7&11, Seite 263–268 & 407–434)