Graphen und Algorithmen

Vorlesung #5: Graphenzusammenhang

Dr. Armin Fügenschuh
Technische Universität Darmstadt

WS 2007/2008

Übersicht

Übersicht

* Definitionen (Brücke, Zerlegungsknoten, mehrfacher Knoten- und Kantenzusammenhang)

Übersicht

* Definitionen (Brücke, Zerlegungsknoten, mehrfacher Knoten- und Kantenzusammenhang)
* Satz von Whitney

Übersicht

* Definitionen (Brücke, Zerlegungsknoten, mehrfacher Knoten- und Kantenzusammenhang)
* Satz von Whitney
* Satz von Menger in der Knoten- und Kantenversion

Übersicht

* Definitionen (Brücke, Zerlegungsknoten, mehrfacher Knoten- und Kantenzusammenhang)
* Satz von Whitney
* Satz von Menger in der Knoten- und Kantenversion
* Verallgemeinerter Satz von Whitney (Knoten- und Kantenversion)

Brücken

Brücken

* **Definition 1**:
  Die Anzahl der Zusammenhangskomponenten in einem Graphen G wird mit $\omega(G)$ bezeichnet.

Brücken

* **Definition 1**:
  Die Anzahl der Zusammenhangskomponenten in einem Graphen G wird mit $\omega(G)$ bezeichnet.
* **Satz 2**:
  Sei e eine Kante im Graphen G und sei $G - e$ der Untergraph von G, der durch das Entfernen von e entsteht. Dann gilt $\omega(G) \leq \omega(G - e) \leq \omega(G) + 1$.

Brücken

* **Definition 1**:
  Die Anzahl der Zusammenhangskomponenten in einem Graphen G wird mit $\omega(G)$ bezeichnet.
* **Satz 2**:
  Sei e eine Kante im Graphen G und sei $G - e$ der Untergraph von G, der durch das Entfernen von e entsteht. Dann gilt $\omega(G) \leq \omega(G - e) \leq \omega(G) + 1$.
* Beweis: Übung.

Brücken

* **Definition 1**:
  Die Anzahl der Zusammenhangskomponenten in einem Graphen G wird mit $\omega(G)$ bezeichnet.
* **Satz 2**:
  Sei e eine Kante im Graphen G und sei $G - e$ der Untergraph von G, der durch das Entfernen von e entsteht. Dann gilt $\omega(G) \leq \omega(G - e) \leq \omega(G) + 1$.
* Beweis: Übung.
* **Definition 3**:
  Eine Kante e eines Graphen G heißt **Brücke** (oder **Isthmus**), wenn der Untergraph $G - e$ mehr Zusammenhangskomponenten hat als G.

Brücken

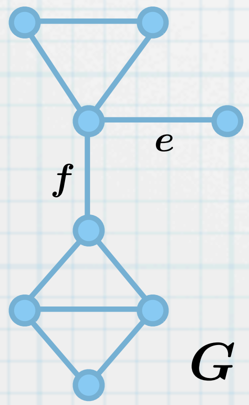
* **Definition 1**:
  Die Anzahl der Zusammenhangskomponenten in einem Graphen G wird mit $\omega(G)$ bezeichnet.
* **Satz 2**:
  Sei e eine Kante im Graphen G und sei $G - e$ der Untergraph von G, der durch das Entfernen von e entsteht. Dann gilt $\omega(G) \leq \omega(G - e) \leq \omega(G) + 1$.
* Beweis: Übung.
* **Definition 3**:
  Eine Kante e eines Graphen G heißt **Brücke** (oder **Isthmus**), wenn der Untergraph $G - e$ mehr Zusammenhangskomponenten hat als G.
* Bemerkung: Nach Satz 2 ist dann $\omega(G) < \omega(G - e) = \omega(G) + 1$, also hat $G - e$ genau eine Komponente mehr als G.

Brücken

* **Definition 1**:
  Die Anzahl der Zusammenhangskomponenten in einem Graphen G wird mit $\omega(G)$ bezeichnet.
* **Satz 2**:
  Sei e eine Kante im Graphen G und sei $G - e$ der Untergraph von G, der durch das Entfernen von e entsteht. Dann gilt $\omega(G) \leq \omega(G - e) \leq \omega(G) + 1$.
* Beweis: Übung.
* **Definition 3**:
  Eine Kante e eines Graphen G heißt **Brücke** (oder **Isthmus**), wenn der Untergraph $G - e$ mehr Zusammenhangskomponenten hat als G.
* Bemerkung: Nach Satz 2 ist dann $\omega(G) < \omega(G - e) = \omega(G) + 1$, also hat $G - e$ genau eine Komponente mehr als G.
* Beispiel: Graph mit Brücken e und f sowie die Graphen $G - e$ bzw. $G - f$.

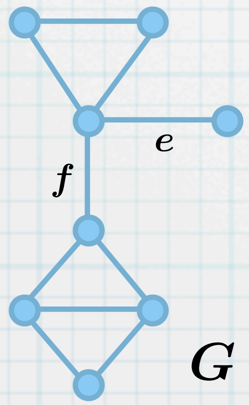
Brücken

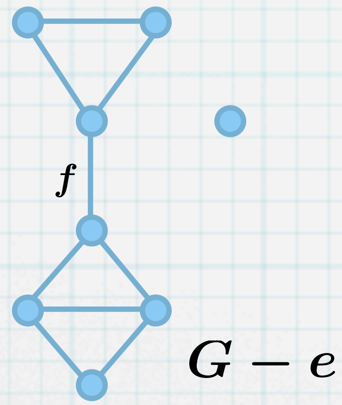
* **Definition 1**:
  Die Anzahl der Zusammenhangskomponenten in einem Graphen G wird mit $\omega(G)$ bezeichnet.
* **Satz 2**:
  Sei e eine Kante im Graphen G und sei $G - e$ der Untergraph von G, der durch das Entfernen von e entsteht. Dann gilt $\omega(G) \leq \omega(G - e) \leq \omega(G) + 1$.
* Beweis: Übung.
* **Definition 3**:
  Eine Kante e eines Graphen G heißt **Brücke** (oder **Isthmus**), wenn der Untergraph $G - e$ mehr Zusammenhangskomponenten hat als G.
* Bemerkung: Nach Satz 2 ist dann $\omega(G) < \omega(G - e) = \omega(G) + 1$, also hat $G - e$ genau eine Komponente mehr als G.
* Beispiel: Graph mit Brücken e und f sowie die Graphen $G - e$ bzw. $G - f$.



Brücken

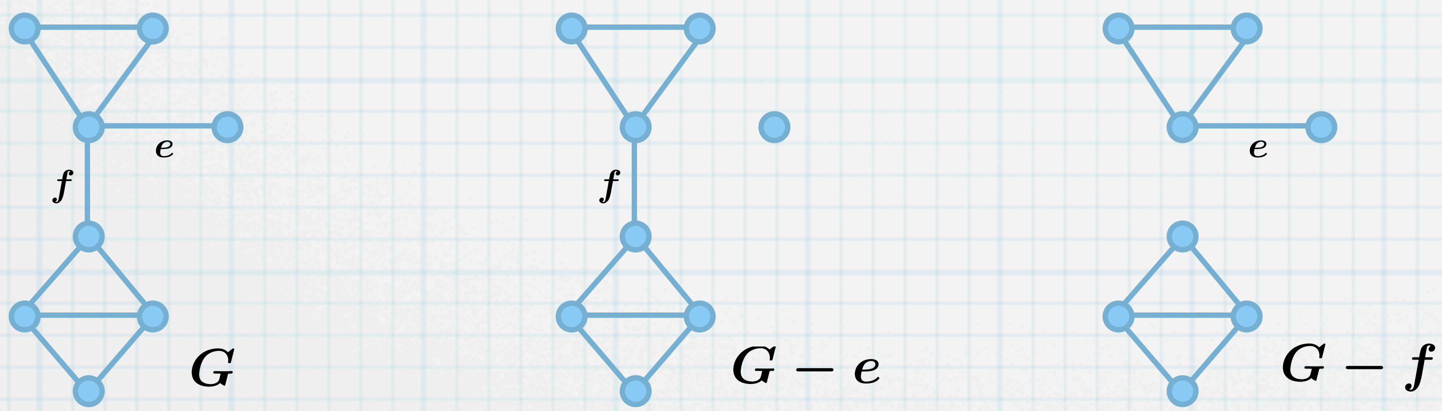
* **Definition 1**:
  Die Anzahl der Zusammenhangskomponenten in einem Graphen G wird mit $\omega(G)$ bezeichnet.
* **Satz 2**:
  Sei e eine Kante im Graphen G und sei $G - e$ der Untergraph von G, der durch das Entfernen von e entsteht. Dann gilt $\omega(G) \leq \omega(G-e) \leq \omega(G) + 1$.
* Beweis: Übung.
* **Definition 3**:
  Eine Kante e eines Graphen G heißt **Brücke** (oder **Isthmus**), wenn der Untergraph $G - e$ mehr Zusammenhangskomponenten hat als G.
* Bemerkung: Nach Satz 2 ist dann $\omega(G) < \omega(G-e) = \omega(G) + 1$, also hat $G - e$ genau eine Komponente mehr als G.
* Beispiel: Graph mit Brücken e und f sowie die Graphen $G - e$ bzw. $G - f$.





Brücken

- **Definition 1**:
  Die Anzahl der Zusammenhangskomponenten in einem Graphen G wird mit $\omega(G)$ bezeichnet.
- **Satz 2**:
  Sei e eine Kante im Graphen G und sei $G - e$ der Untergraph von G, der durch das Entfernen von e entsteht. Dann gilt $\omega(G) \leq \omega(G-e) \leq \omega(G) + 1$.
- Beweis: Übung.
- **Definition 3**:
  Eine Kante e eines Graphen G heißt **Brücke** (oder **Isthmus**), wenn der Untergraph $G - e$ mehr Zusammenhangskomponenten hat als G.
- Bemerkung: Nach Satz 2 ist dann $\omega(G) < \omega(G-e) = \omega(G) + 1$, also hat $G - e$ genau eine Komponente mehr als G.
- Beispiel: Graph mit Brücken e und f sowie die Graphen $G - e$ bzw. $G - f$.



Zerlegungsknoten

Zerlegungsknoten

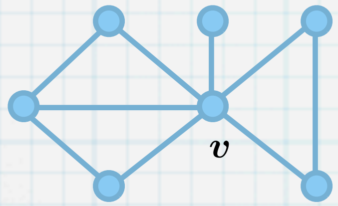
* **Definition 4**:
  Ein Knoten v eines Graphen G heißt **Zerlegungsknoten** (oder **Artikulation**) von G, wenn $\omega(G) < \omega(G - v)$, wobei $G - v$ der Untergraph von G ist, der durch Entfernen von v und aller mit v inzidenten Kanten aus G entsteht.

Zerlegungsknoten

* **Definition 4**:
Ein Knoten v eines Graphen G heißt **Zerlegungsknoten** (oder **Artikulation**) von G, wenn $\omega(G) < \omega(G - v)$, wobei $G - v$ der Untergraph von G ist, der durch Entfernen von v und aller mit v inzidenten Kanten aus G entsteht.
* Beispiele: v ist Zerlegungsknoten in G_1, wohingegen G_2 keine Zerlegungsknoten hat.

Zerlegungsknoten

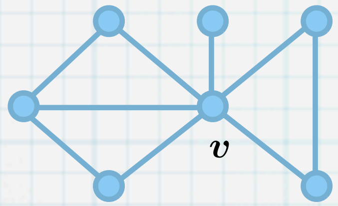
* **Definition 4**:
Ein Knoten v eines Graphen G heißt **Zerlegungsknoten** (oder **Artikulation**) von G, wenn $\omega(G) < \omega(G - v)$, wobei $G - v$ der Untergraph von G ist, der durch Entfernen von v und aller mit v inzidenten Kanten aus G entsteht.
* Beispiele: v ist Zerlegungsknoten in G_1, wohingegen G_2 keine Zerlegungsknoten hat.



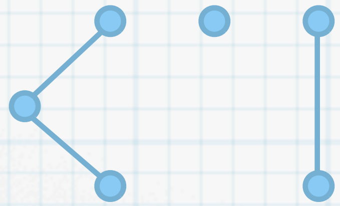
G_1

Zerlegungsknoten

* **Definition 4**:
  Ein Knoten v eines Graphen G heißt **Zerlegungsknoten** (oder **Artikulation**) von G, wenn $\omega(G) < \omega(G - v)$, wobei $G - v$ der Untergraph von G ist, der durch Entfernen von v und aller mit v inzidenten Kanten aus G entsteht.
* Beispiele: v ist Zerlegungsknoten in G_1, wohingegen G_2 keine Zerlegungsknoten hat.



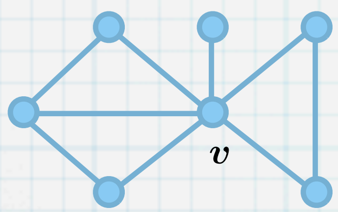
G_1



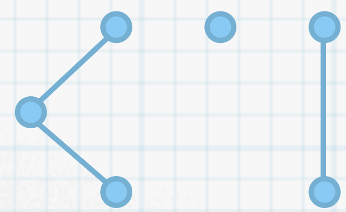
$G_1 - v$

Zerlegungsknoten

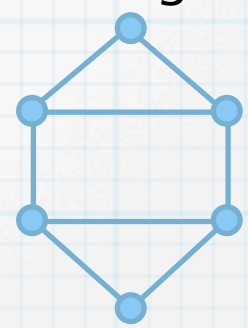
- **Definition 4**:
  Ein Knoten v eines Graphen G heißt **Zerlegungsknoten** (oder **Artikulation**) von G, wenn $\omega(G) < \omega(G-v)$, wobei $G-v$ der Untergraph von G ist, der durch Entfernen von v und aller mit v inzidenten Kanten aus G entsteht.
- Beispiele: v ist Zerlegungsknoten in G_1, wohingegen G_2 keine Zerlegungsknoten hat.



G_1



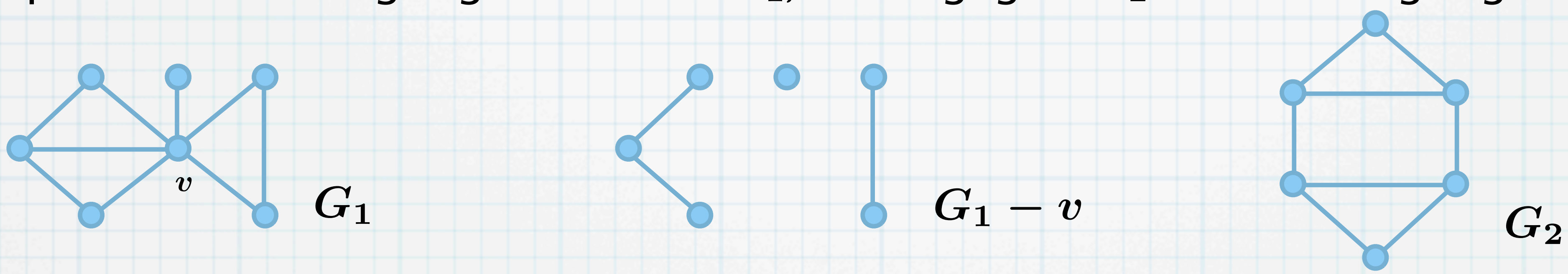
$G_1 - v$



G_2

Zerlegungsknoten

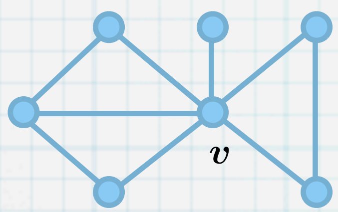
* **Definition 4**:
Ein Knoten v eines Graphen G heißt **Zerlegungsknoten** (oder **Artikulation**) von G, wenn $\omega(G) < \omega(G-v)$, wobei $G-v$ der Untergraph von G ist, der durch Entfernen von v und aller mit v inzidenten Kanten aus G entsteht.
* Beispiele: v ist Zerlegungsknoten in G_1, wohingegen G_2 keine Zerlegungsknoten hat.



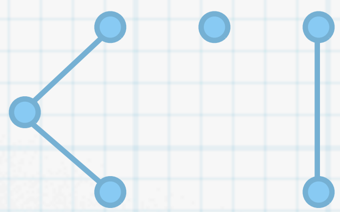
* Zerlegungsknoten können durch die Verwendung von Wegen charakterisiert werden.

Zerlegungsknoten

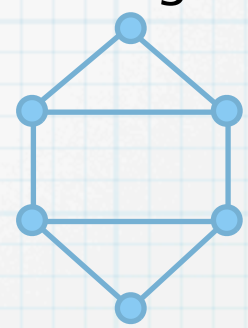
- **Definition 4**:
  Ein Knoten v eines Graphen G heißt **Zerlegungsknoten** (oder **Artikulation**) von G, wenn $\omega(G) < \omega(G - v)$, wobei $G - v$ der Untergraph von G ist, der durch Entfernen von v und aller mit v inzidenten Kanten aus G entsteht.
- Beispiele: v ist Zerlegungsknoten in G_1, wohingegen G_2 keine Zerlegungsknoten hat.



G_1



$G_1 - v$

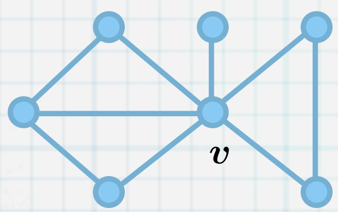


G_2

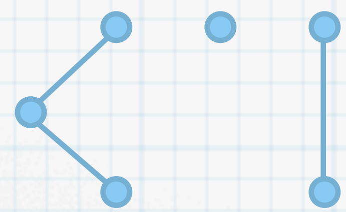
- Zerlegungsknoten können durch die Verwendung von Wegen charakterisiert werden.
- **Satz 5**:
  Sei v ein Knoten des zusammenhängenden Graphen G. Es ist v genau dann ein Zerlegungsknoten von G, wenn es zwei Knoten $u, w \in V \setminus \{v\}$ gibt, so dass v in jedem u–w–Weg in G enthalten ist.

Zerlegungsknoten

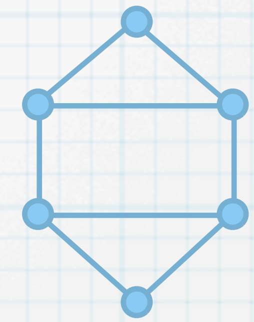
* **Definition 4**:
  Ein Knoten v eines Graphen G heißt **Zerlegungsknoten** (oder **Artikulation**) von G, wenn $\omega(G) < \omega(G - v)$, wobei $G - v$ der Untergraph von G ist, der durch Entfernen von v und aller mit v inzidenten Kanten aus G entsteht.
* Beispiele: v ist Zerlegungsknoten in G_1, wohingegen G_2 keine Zerlegungsknoten hat.



G_1



$G_1 - v$

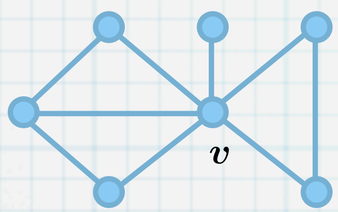


G_2

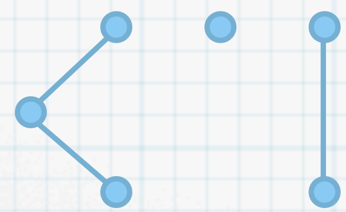
* Zerlegungsknoten können durch die Verwendung von Wegen charakterisiert werden.
* **Satz 5**:
  Sei v ein Knoten des zusammenhängenden Graphen G. Es ist v genau dann ein Zerlegungsknoten von G, wenn es zwei Knoten $u, w \in V \setminus \{v\}$ gibt, so dass v in jedem u–w–Weg in G enthalten ist.
* Beweis: Übung.

Zerlegungsknoten

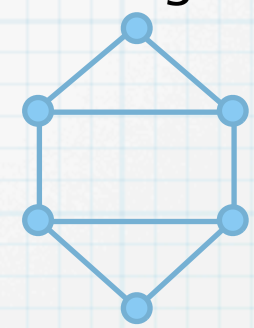
* **Definition 4**:
  Ein Knoten v eines Graphen G heißt **Zerlegungsknoten** (oder **Artikulation**) von G, wenn $\omega(G) < \omega(G - v)$, wobei $G - v$ der Untergraph von G ist, der durch Entfernen von v und aller mit v inzidenten Kanten aus G entsteht.
* Beispiele: v ist Zerlegungsknoten in G_1, wohingegen G_2 keine Zerlegungsknoten hat.



G_1



$G_1 - v$

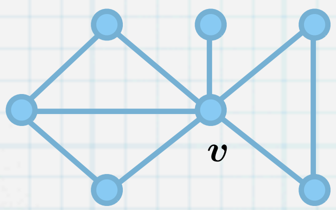


G_2

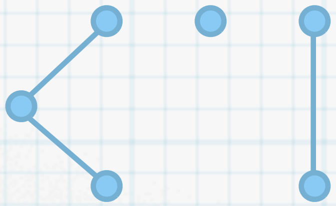
* Zerlegungsknoten können durch die Verwendung von Wegen charakterisiert werden.
* **Satz 5**:
  Sei v ein Knoten des zusammenhängenden Graphen G. Es ist v genau dann ein Zerlegungsknoten von G, wenn es zwei Knoten $u, w \in V\backslash\{v\}$ gibt, so dass v in jedem u–w–Weg in G enthalten ist.
* Beweis: Übung.
* Allerdings kann nicht jeder Knoten ein Zerlegungsknoten sein.

Zerlegungsknoten

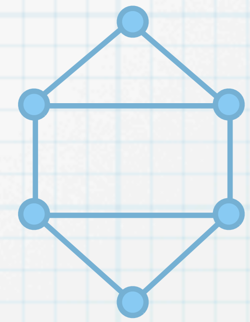
* **Definition 4**:
  Ein Knoten v eines Graphen G heißt **Zerlegungsknoten** (oder **Artikulation**) von G, wenn $\omega(G) < \omega(G - v)$, wobei $G - v$ der Untergraph von G ist, der durch Entfernen von v und aller mit v inzidenten Kanten aus G entsteht.
* Beispiele: v ist Zerlegungsknoten in G_1, wohingegen G_2 keine Zerlegungsknoten hat.



G_1



$G_1 - v$

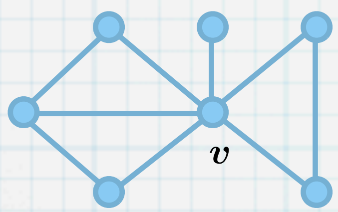


G_2

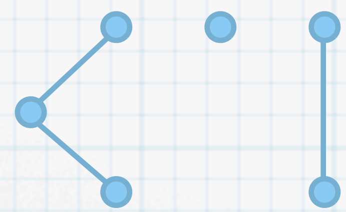
* Zerlegungsknoten können durch die Verwendung von Wegen charakterisiert werden.
* **Satz 5**:
  Sei v ein Knoten des zusammenhängenden Graphen G. Es ist v genau dann ein Zerlegungsknoten von G, wenn es zwei Knoten $u, w \in V\backslash\{v\}$ gibt, so dass v in jedem u–w–Weg in G enthalten ist.
* Beweis: Übung.
* Allerdings kann nicht jeder Knoten ein Zerlegungsknoten sein.
* **Satz 6**:
  Es sei G ein Graph mit mindestens 2 Knoten. Dann enthält G mindestens 2 Knoten, die keine Zerlegungsknoten sind.

Zerlegungsknoten

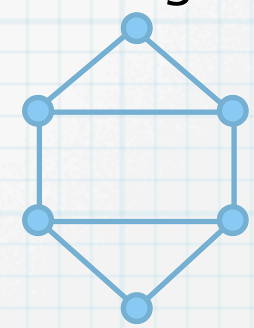
* **Definition 4**:
Ein Knoten v eines Graphen G heißt **Zerlegungsknoten** (oder **Artikulation**) von G, wenn $\omega(G) < \omega(G-v)$, wobei $G-v$ der Untergraph von G ist, der durch Entfernen von v und aller mit v inzidenten Kanten aus G entsteht.
* Beispiele: v ist Zerlegungsknoten in G_1, wohingegen G_2 keine Zerlegungsknoten hat.



G_1



$G_1 - v$

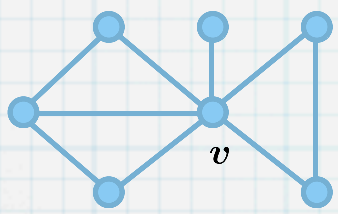


G_2

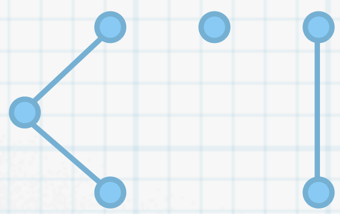
* Zerlegungsknoten können durch die Verwendung von Wegen charakterisiert werden.
* **Satz 5**:
Sei v ein Knoten des zusammenhängenden Graphen G. Es ist v genau dann ein Zerlegungsknoten von G, wenn es zwei Knoten $u, w \in V\backslash\{v\}$ gibt, so dass v in jedem u–w–Weg in G enthalten ist.
* Beweis: Übung.
* Allerdings kann nicht jeder Knoten ein Zerlegungsknoten sein.
* **Satz 6**:
Es sei G ein Graph mit mindestens 2 Knoten. Dann enthält G mindestens 2 Knoten, die keine Zerlegungsknoten sind.
* Beweis: Übung.

Zerlegungsknoten

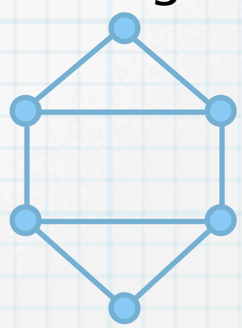
* **Definition 4**:
Ein Knoten v eines Graphen G heißt **Zerlegungsknoten** (oder **Artikulation**) von G, wenn $\omega(G) < \omega(G-v)$, wobei $G-v$ der Untergraph von G ist, der durch Entfernen von v und aller mit v inzidenten Kanten aus G entsteht.
* Beispiele: v ist Zerlegungsknoten in G_1, wohingegen G_2 keine Zerlegungsknoten hat.



G_1



$G_1 - v$

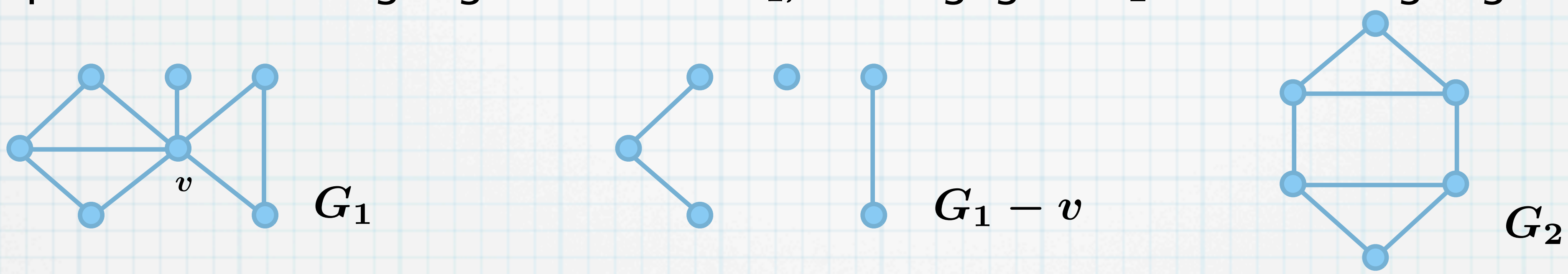


G_2

* Zerlegungsknoten können durch die Verwendung von Wegen charakterisiert werden.
* **Satz 5**:
Sei v ein Knoten des zusammenhängenden Graphen G. Es ist v genau dann ein Zerlegungsknoten von G, wenn es zwei Knoten $u, w \in V\setminus\{v\}$ gibt, so dass v in jedem u–w–Weg in G enthalten ist.
* Beweis: Übung.
* Allerdings kann nicht jeder Knoten ein Zerlegungsknoten sein.
* **Satz 6**:
Es sei G ein Graph mit mindestens 2 Knoten. Dann enthält G mindestens 2 Knoten, die keine Zerlegungsknoten sind.
* Beweis: Übung.
* **Lemma 7**:
Sei G ein zusammenhängender Graph mit mindestens 3 Knoten. Wenn G eine Brücke enthält, dann enthält G (mind.) einen Zerlegungsknoten.

Zerlegungsknoten

- **Definition 4**:
  Ein Knoten v eines Graphen G heißt **Zerlegungsknoten** (oder **Artikulation**) von G, wenn $\omega(G) < \omega(G - v)$, wobei $G - v$ der Untergraph von G ist, der durch Entfernen von v und aller mit v inzidenten Kanten aus G entsteht.
- Beispiele: v ist Zerlegungsknoten in G_1, wohingegen G_2 keine Zerlegungsknoten hat.



- Zerlegungsknoten können durch die Verwendung von Wegen charakterisiert werden.
- **Satz 5**:
  Sei v ein Knoten des zusammenhängenden Graphen G. Es ist v genau dann ein Zerlegungsknoten von G, wenn es zwei Knoten $u, w \in V\backslash\{v\}$ gibt, so dass v in jedem u–w–Weg in G enthalten ist.
- Beweis: Übung.
- Allerdings kann nicht jeder Knoten ein Zerlegungsknoten sein.
- **Satz 6**:
  Es sei G ein Graph mit mindestens 2 Knoten. Dann enthält G mindestens 2 Knoten, die keine Zerlegungsknoten sind.
- Beweis: Übung.
- **Lemma 7**:
  Sei G ein zusammenhängender Graph mit mindestens 3 Knoten. Wenn G eine Brücke enthält, dann enthält G (mind.) einen Zerlegungsknoten.
- Beweis: Übung.

Zusammenhangszahl

Zusammenhangszahl

* Ein zusammenhängender Graph mit einem Zerlegungsknoten v ist bei v „verwundbar“.

Zusammenhangszahl

* Ein zusammenhängender Graph mit einem Zerlegungsknoten v ist bei v „verwundbar“.
* Hat ein Graph keine Zerlegungsknoten, dann ist sein Zusammenhang nicht durch die Entfernung eines seiner Knoten gefährdet.

Zusammenhangszahl

* Ein zusammenhängender Graph mit einem Zerlegungsknoten v ist bei v „verwundbar".
* Hat ein Graph keine Zerlegungsknoten, dann ist sein Zusammenhang nicht durch die Entfernung eines seiner Knoten gefährdet.
* Die folgende Definition liefert ein Maß für diese „Verwundbarkeit".

Zusammenhangszahl

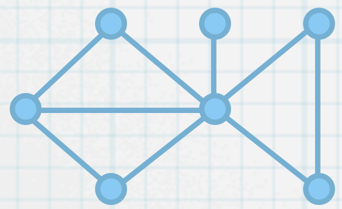
* Ein zusammenhängender Graph mit einem Zerlegungsknoten v ist bei v „verwundbar“.
* Hat ein Graph keine Zerlegungsknoten, dann ist sein Zusammenhang nicht durch die Entfernung eines seiner Knoten gefährdet.
* Die folgende Definition liefert ein Maß für diese „Verwundbarkeit“.
* **Definition 8**:
Sei G ein schlichter Graph. Die (**Knoten-**) **Zusammenhangszahl** $\kappa(G)$ ist definiert als die kleinste Anzahl von Knoten in G, deren Entfernung aus G entweder einen nichtzusammenhängenden Graphen oder K_1 hinterlässt.

Zusammenhangszahl

* Ein zusammenhängender Graph mit einem Zerlegungsknoten v ist bei v „verwundbar".
* Hat ein Graph keine Zerlegungsknoten, dann ist sein Zusammenhang nicht durch die Entfernung eines seiner Knoten gefährdet.
* Die folgende Definition liefert ein Maß für diese „Verwundbarkeit".
* **Definition 8**:
  Sei G ein schlichter Graph. Die (**Knoten-**) **Zusammenhangszahl** $\kappa(G)$ ist definiert als die kleinste Anzahl von Knoten in G, deren Entfernung aus G entweder einen nichtzusammenhängenden Graphen oder K_1 hinterlässt.
* Beispiele:

Zusammenhangszahl

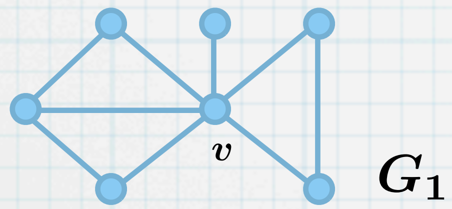
* Ein zusammenhängender Graph mit einem Zerlegungsknoten v ist bei v „verwundbar“.
* Hat ein Graph keine Zerlegungsknoten, dann ist sein Zusammenhang nicht durch die Entfernung eines seiner Knoten gefährdet.
* Die folgende Definition liefert ein Maß für diese „Verwundbarkeit“.
* **Definition 8**:
  Sei G ein schlichter Graph. Die (**Knoten-**) **Zusammenhangszahl** $\kappa(G)$ ist definiert als die kleinste Anzahl von Knoten in G, deren Entfernung aus G entweder einen nichtzusammenhängenden Graphen oder K_1 hinterlässt.
* Beispiele:



G_1

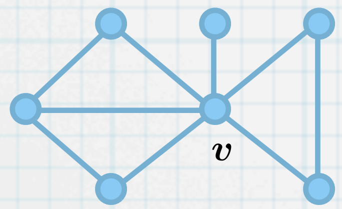
Zusammenhangszahl

* Ein zusammenhängender Graph mit einem Zerlegungsknoten v ist bei v „verwundbar“.
* Hat ein Graph keine Zerlegungsknoten, dann ist sein Zusammenhang nicht durch die Entfernung eines seiner Knoten gefährdet.
* Die folgende Definition liefert ein Maß für diese „Verwundbarkeit“.
* **Definition 8**:
  Sei G ein schlichter Graph. Die (**Knoten-**) **Zusammenhangszahl** $\kappa(G)$ ist definiert als die kleinste Anzahl von Knoten in G, deren Entfernung aus G entweder einen nichtzusammenhängenden Graphen oder K_1 hinterlässt.
* Beispiele:



Zusammenhangszahl

* Ein zusammenhängender Graph mit einem Zerlegungsknoten v ist bei v „verwundbar".
* Hat ein Graph keine Zerlegungsknoten, dann ist sein Zusammenhang nicht durch die Entfernung eines seiner Knoten gefährdet.
* Die folgende Definition liefert ein Maß für diese „Verwundbarkeit".
* **Definition 8**:
  Sei G ein schlichter Graph. Die (**Knoten-**) **Zusammenhangszahl** $\kappa(G)$ ist definiert als die kleinste Anzahl von Knoten in G, deren Entfernung aus G entweder einen nichtzusammenhängenden Graphen oder K_1 hinterlässt.
* Beispiele:

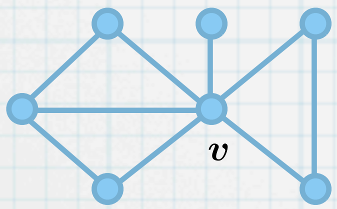


G_1

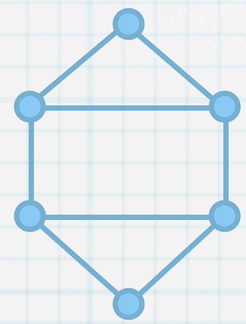
$\kappa(G_1) = 1$

Zusammenhangszahl

- Ein zusammenhängender Graph mit einem Zerlegungsknoten v ist bei v „verwundbar“.
- Hat ein Graph keine Zerlegungsknoten, dann ist sein Zusammenhang nicht durch die Entfernung eines seiner Knoten gefährdet.
- Die folgende Definition liefert ein Maß für diese „Verwundbarkeit“.
- **Definition 8**:
  Sei G ein schlichter Graph. Die (**Knoten-**) **Zusammenhangszahl** $\kappa(G)$ ist definiert als die kleinste Anzahl von Knoten in G, deren Entfernung aus G entweder einen nichtzusammenhängenden Graphen oder K_1 hinterlässt.
- Beispiele:



G_1

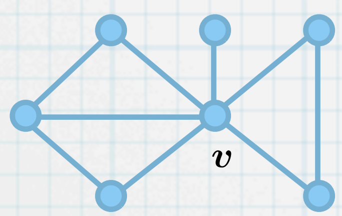


G_2

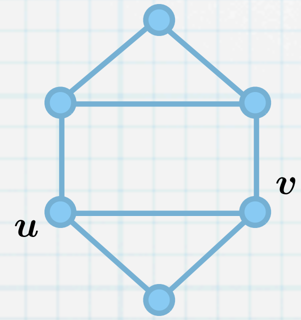
$\kappa(G_1) = 1$

Zusammenhangszahl

- Ein zusammenhängender Graph mit einem Zerlegungsknoten v ist bei v „verwundbar".
- Hat ein Graph keine Zerlegungsknoten, dann ist sein Zusammenhang nicht durch die Entfernung eines seiner Knoten gefährdet.
- Die folgende Definition liefert ein Maß für diese „Verwundbarkeit".
- **Definition 8**:
  Sei G ein schlichter Graph. Die (**Knoten-**) **Zusammenhangszahl** $\kappa(G)$ ist definiert als die kleinste Anzahl von Knoten in G, deren Entfernung aus G entweder einen nichtzusammenhängenden Graphen oder K_1 hinterlässt.
- Beispiele:



G_1

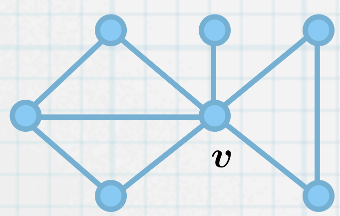


G_2

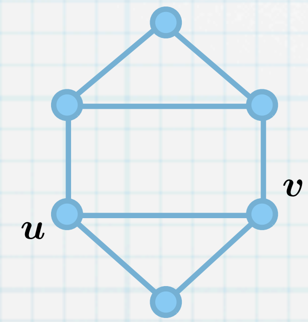
$\kappa(G_1) = 1$

Zusammenhangszahl

* Ein zusammenhängender Graph mit einem Zerlegungsknoten v ist bei v „verwundbar“.
* Hat ein Graph keine Zerlegungsknoten, dann ist sein Zusammenhang nicht durch die Entfernung eines seiner Knoten gefährdet.
* Die folgende Definition liefert ein Maß für diese „Verwundbarkeit“.
* **Definition 8**:
  Sei G ein schlichter Graph. Die (**Knoten-**) **Zusammenhangszahl** $\kappa(G)$ ist definiert als die kleinste Anzahl von Knoten in G, deren Entfernung aus G entweder einen nichtzusammenhängenden Graphen oder K_1 hinterlässt.
* Beispiele:



G_1



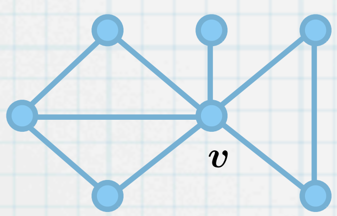
G_2

$\kappa(G_1) = 1$

$\kappa(G_2) = 2$

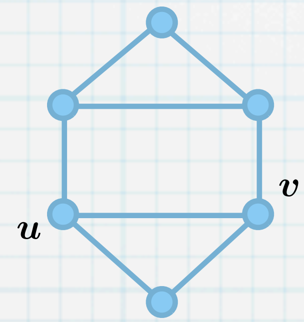
Zusammenhangszahl

- Ein zusammenhängender Graph mit einem Zerlegungsknoten v ist bei v „verwundbar“.
- Hat ein Graph keine Zerlegungsknoten, dann ist sein Zusammenhang nicht durch die Entfernung eines seiner Knoten gefährdet.
- Die folgende Definition liefert ein Maß für diese „Verwundbarkeit“.
- **Definition 8**:
  Sei G ein schlichter Graph. Die (**Knoten-**) **Zusammenhangszahl** $\kappa(G)$ ist definiert als die kleinste Anzahl von Knoten in G, deren Entfernung aus G entweder einen nichtzusammenhängenden Graphen oder K_1 hinterlässt.
- Beispiele:



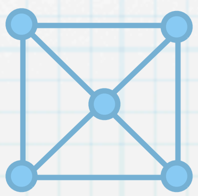
G_1

$\kappa(G_1) = 1$



G_2

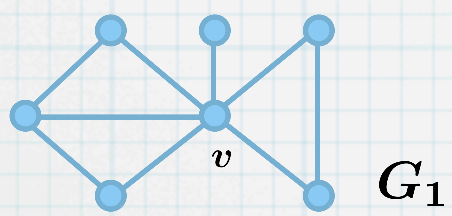
$\kappa(G_2) = 2$



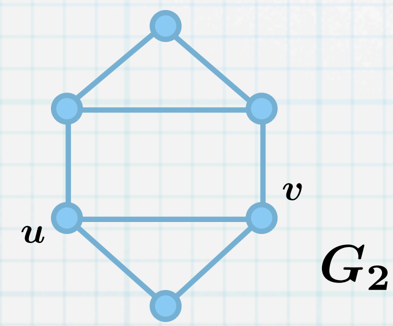
G_3

Zusammenhangszahl

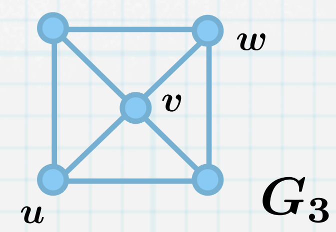
* Ein zusammenhängender Graph mit einem Zerlegungsknoten v ist bei v „verwundbar".
* Hat ein Graph keine Zerlegungsknoten, dann ist sein Zusammenhang nicht durch die Entfernung eines seiner Knoten gefährdet.
* Die folgende Definition liefert ein Maß für diese „Verwundbarkeit".
* **Definition 8**:
  Sei G ein schlichter Graph. Die (**Knoten-**) **Zusammenhangszahl** $\kappa(G)$ ist definiert als die kleinste Anzahl von Knoten in G, deren Entfernung aus G entweder einen nichtzusammenhängenden Graphen oder K_1 hinterlässt.
* Beispiele:



$\kappa(G_1) = 1$

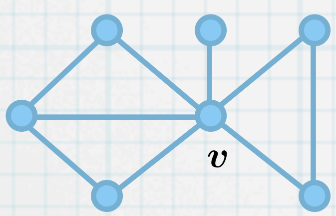


$\kappa(G_2) = 2$



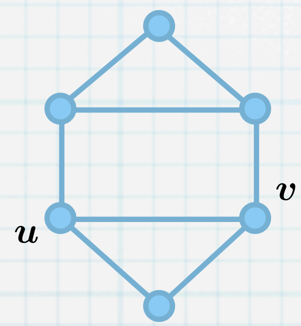
Zusammenhangszahl

* Ein zusammenhängender Graph mit einem Zerlegungsknoten v ist bei v „verwundbar“.
* Hat ein Graph keine Zerlegungsknoten, dann ist sein Zusammenhang nicht durch die Entfernung eines seiner Knoten gefährdet.
* Die folgende Definition liefert ein Maß für diese „Verwundbarkeit“.
* **Definition 8**:
  Sei G ein schlichter Graph. Die (**Knoten-**) **Zusammenhangszahl** $\kappa(G)$ ist definiert als die kleinste Anzahl von Knoten in G, deren Entfernung aus G entweder einen nichtzusammenhängenden Graphen oder K_1 hinterlässt.
* Beispiele:



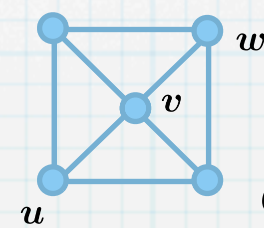
G_1

$\kappa(G_1) = 1$



G_2

$\kappa(G_2) = 2$

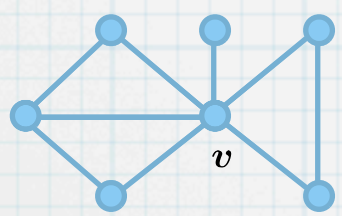


G_3

$\kappa(G_3) = 3$

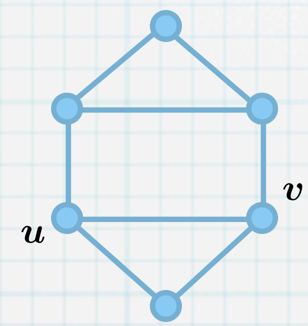
Zusammenhangszahl

* Ein zusammenhängender Graph mit einem Zerlegungsknoten v ist bei v „verwundbar“.
* Hat ein Graph keine Zerlegungsknoten, dann ist sein Zusammenhang nicht durch die Entfernung eines seiner Knoten gefährdet.
* Die folgende Definition liefert ein Maß für diese „Verwundbarkeit“.
* **Definition 8**:
  Sei G ein schlichter Graph. Die (**Knoten-**) **Zusammenhangszahl** $\kappa(G)$ ist definiert als die kleinste Anzahl von Knoten in G, deren Entfernung aus G entweder einen nichtzusammenhängenden Graphen oder K_1 hinterlässt.
* Beispiele:



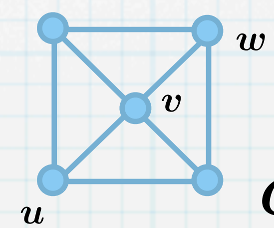
G_1

$\kappa(G_1) = 1$



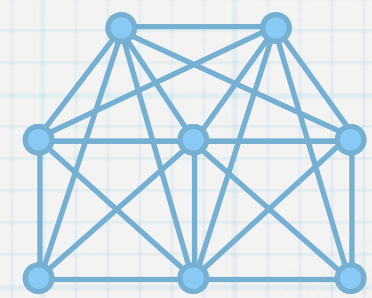
G_2

$\kappa(G_2) = 2$



G_3

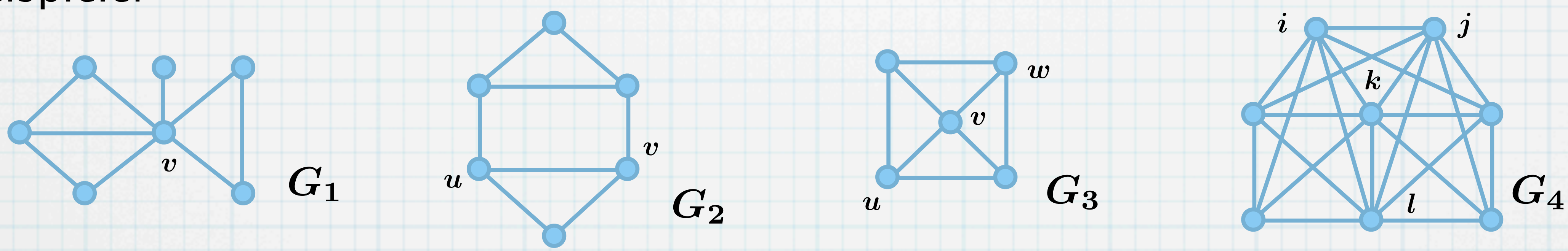
$\kappa(G_3) = 3$



G_4

Zusammenhangszahl

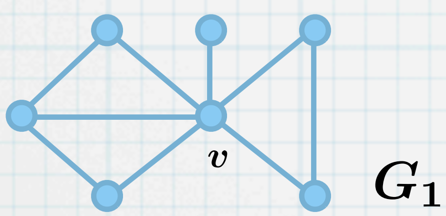
* Ein zusammenhängender Graph mit einem Zerlegungsknoten v ist bei v „verwundbar“.
* Hat ein Graph keine Zerlegungsknoten, dann ist sein Zusammenhang nicht durch die Entfernung eines seiner Knoten gefährdet.
* Die folgende Definition liefert ein Maß für diese „Verwundbarkeit“.
* **Definition 8**:
  Sei G ein schlichter Graph. Die (**Knoten-**) **Zusammenhangszahl** $\kappa(G)$ ist definiert als die kleinste Anzahl von Knoten in G, deren Entfernung aus G entweder einen nichtzusammenhängenden Graphen oder K_1 hinterlässt.
* Beispiele:



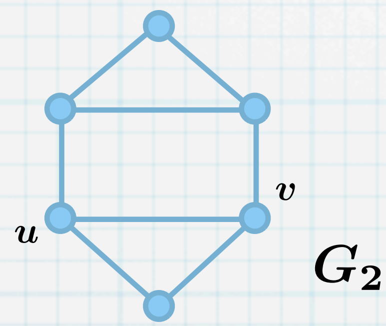
$\kappa(G_1) = 1$ $\kappa(G_2) = 2$ $\kappa(G_3) = 3$

Zusammenhangszahl

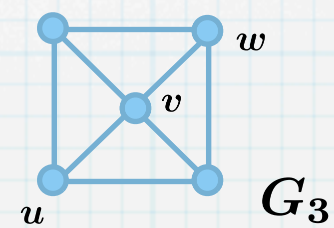
* Ein zusammenhängender Graph mit einem Zerlegungsknoten v ist bei v „verwundbar“.
* Hat ein Graph keine Zerlegungsknoten, dann ist sein Zusammenhang nicht durch die Entfernung eines seiner Knoten gefährdet.
* Die folgende Definition liefert ein Maß für diese „Verwundbarkeit“.
* **Definition 8**:
  Sei G ein schlichter Graph. Die (**Knoten-**) **Zusammenhangszahl** $\kappa(G)$ ist definiert als die kleinste Anzahl von Knoten in G, deren Entfernung aus G entweder einen nichtzusammenhängenden Graphen oder K_1 hinterlässt.
* Beispiele:



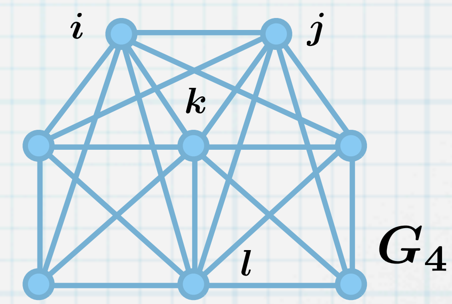
$\kappa(G_1) = 1$



$\kappa(G_2) = 2$



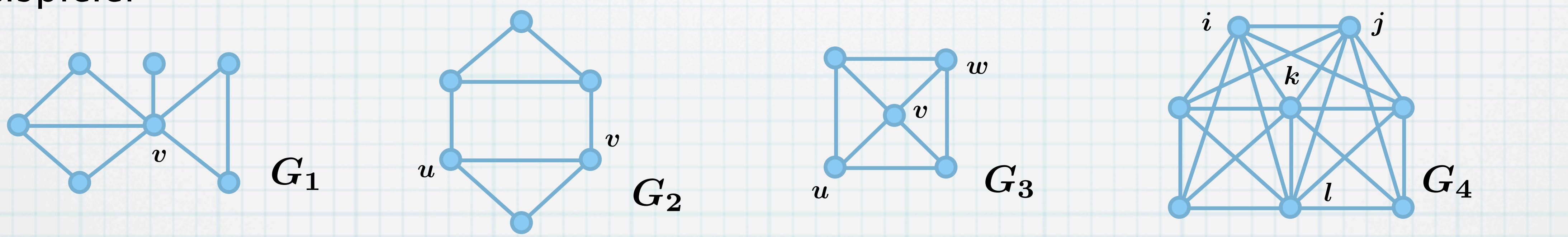
$\kappa(G_3) = 3$



$\kappa(G_4) = 4$

Zusammenhangszahl

- Ein zusammenhängender Graph mit einem Zerlegungsknoten v ist bei v „verwundbar“.
- Hat ein Graph keine Zerlegungsknoten, dann ist sein Zusammenhang nicht durch die Entfernung eines seiner Knoten gefährdet.
- Die folgende Definition liefert ein Maß für diese „Verwundbarkeit“.
- **Definition 8**:
  Sei G ein schlichter Graph. Die (**Knoten-**) **Zusammenhangszahl** $\kappa(G)$ ist definiert als die kleinste Anzahl von Knoten in G, deren Entfernung aus G entweder einen nichtzusammenhängenden Graphen oder K_1 hinterlässt.
- Beispiele:

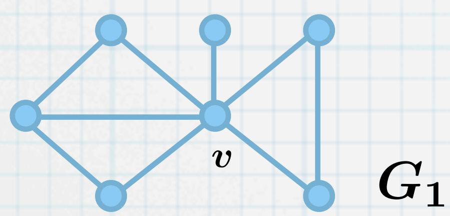


$\kappa(G_1) = 1$ $\kappa(G_2) = 2$ $\kappa(G_3) = 3$ $\kappa(G_4) = 4$

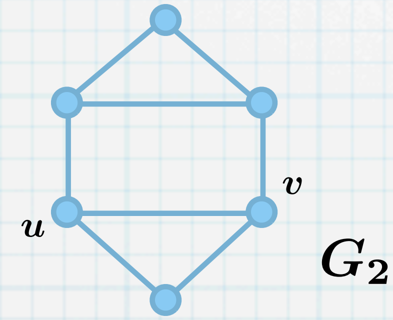
- Bemerkungen:

Zusammenhangszahl

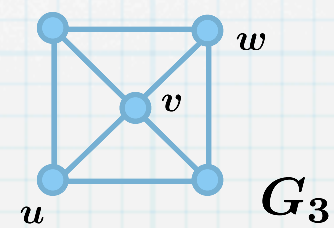
* Ein zusammenhängender Graph mit einem Zerlegungsknoten v ist bei v „verwundbar“.
* Hat ein Graph keine Zerlegungsknoten, dann ist sein Zusammenhang nicht durch die Entfernung eines seiner Knoten gefährdet.
* Die folgende Definition liefert ein Maß für diese „Verwundbarkeit“.
* **Definition 8**:
  Sei G ein schlichter Graph. Die (**Knoten-**) **Zusammenhangszahl** $\kappa(G)$ ist definiert als die kleinste Anzahl von Knoten in G, deren Entfernung aus G entweder einen nichtzusammenhängenden Graphen oder K_1 hinterlässt.
* Beispiele:



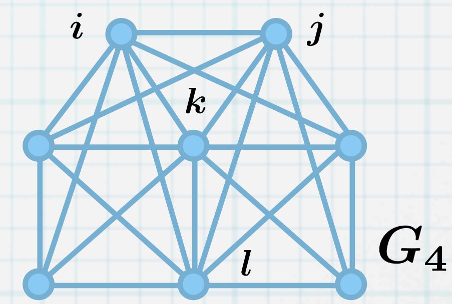
$\kappa(G_1) = 1$



$\kappa(G_2) = 2$



$\kappa(G_3) = 3$

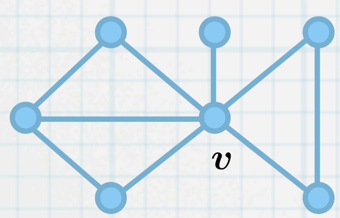


$\kappa(G_4) = 4$

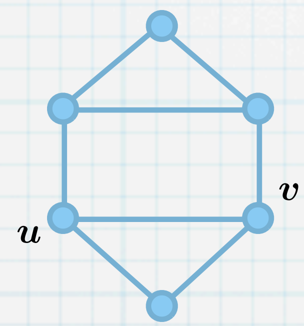
* Bemerkungen:
  * Für $n \geq 2$ führt die Löschung eines Knotens aus K_n zu K_{n-1}. Die Entfernung von t Knoten ($t < n$) führt zu K_{n-t}. Daher gilt $\kappa(K_n) = n - 1$.

Zusammenhangszahl

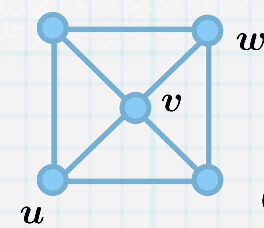
* Ein zusammenhängender Graph mit einem Zerlegungsknoten v ist bei v „verwundbar“.
* Hat ein Graph keine Zerlegungsknoten, dann ist sein Zusammenhang nicht durch die Entfernung eines seiner Knoten gefährdet.
* Die folgende Definition liefert ein Maß für diese „Verwundbarkeit“.
* **Definition 8**:
  Sei G ein schlichter Graph. Die (**Knoten-**) **Zusammenhangszahl** $\kappa(G)$ ist definiert als die kleinste Anzahl von Knoten in G, deren Entfernung aus G entweder einen nichtzusammenhängenden Graphen oder K_1 hinterlässt.
* Beispiele:



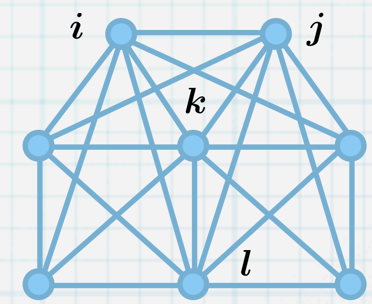
G_1



G_2



G_3



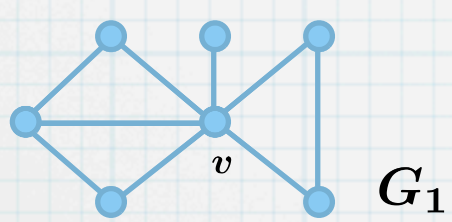
G_4

$\kappa(G_1) = 1$ $\quad$ $\kappa(G_2) = 2$ $\quad$ $\kappa(G_3) = 3$ $\quad$ $\kappa(G_4) = 4$

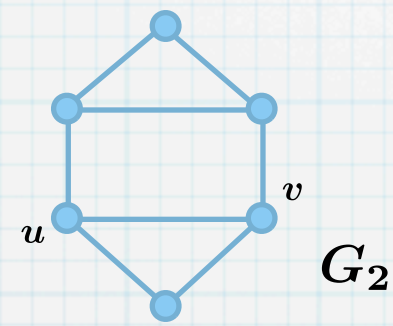
* Bemerkungen:
  * Für $n \geq 2$ führt die Löschung eines Knotens aus K_n zu K_{n-1}. Die Entfernung von t Knoten ($t < n$) führt zu K_{n-t}. Daher gilt $\kappa(K_n) = n - 1$.
  * Für einen zusammenhängenden Graphen G gilt $\kappa(G) = 1$ genau dann, wenn entweder $G = K_2$ oder G einen Zerlegungsknoten enthält.

Zusammenhangszahl

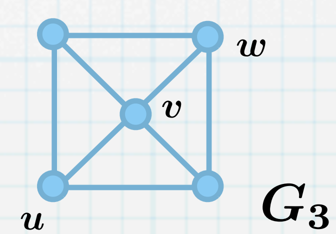
* Ein zusammenhängender Graph mit einem Zerlegungsknoten v ist bei v „verwundbar“.
* Hat ein Graph keine Zerlegungsknoten, dann ist sein Zusammenhang nicht durch die Entfernung eines seiner Knoten gefährdet.
* Die folgende Definition liefert ein Maß für diese „Verwundbarkeit“.
* **Definition 8**:
  Sei G ein schlichter Graph. Die (**Knoten-**) **Zusammenhangszahl** $\kappa(G)$ ist definiert als die kleinste Anzahl von Knoten in G, deren Entfernung aus G entweder einen nichtzusammenhängenden Graphen oder K_1 hinterlässt.
* Beispiele:



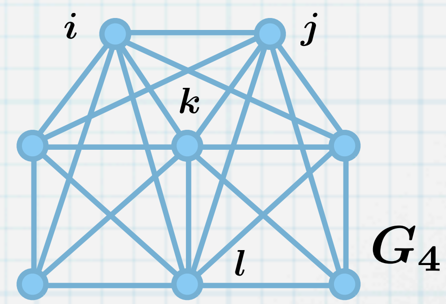
$\kappa(G_1) = 1$



$\kappa(G_2) = 2$



$\kappa(G_3) = 3$



$\kappa(G_4) = 4$

* Bemerkungen:
  * Für $n \geq 2$ führt die Löschung eines Knotens aus K_n zu K_{n-1}. Die Entfernung von t Knoten ($t < n$) führt zu K_{n-t}. Daher gilt $\kappa(K_n) = n - 1$.
  * Für einen zusammenhängenden Graphen G gilt $\kappa(G) = 1$ genau dann, wenn entweder $G = K_2$ oder G einen Zerlegungsknoten enthält.
  * $\kappa(G) = 0$ gilt genau dann, wenn $G = K_1$ oder G unzusammenhängend ist.

Mehrfacher Zusammenhang und disjunkte Wege

Mehrfacher Zusammenhang und disjunkte Wege

* **Definition 9**:
  Ein schlichter Graph G heißt k**–fach zusammenhängend** (wobei $k \geq 1$), wenn $\kappa(G) \geq k$.

Mehrfacher Zusammenhang und disjunkte Wege

* **Definition 9**:
  Ein schlichter Graph G heißt k**–fach zusammenhängend** (wobei $k \geq 1$), wenn $\kappa(G) \geq k$.
* Bemerkungen:

Mehrfacher Zusammenhang und disjunkte Wege

* **Definition 9**:
  Ein schlichter Graph G heißt k–**fach zusammenhängend** (wobei $k \geq 1$), wenn $\kappa(G) \geq k$.
* Bemerkungen:
  * G ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn G zusammenhängend ist und mindestens zwei Knoten enthält.

Mehrfacher Zusammenhang und disjunkte Wege

* **Definition 9**:
  Ein schlichter Graph G heißt k-**fach zusammenhängend** (wobei $k \geq 1$), wenn $\kappa(G) \geq k$.
* Bemerkungen:
  * G ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn G zusammenhängend ist und mindestens zwei Knoten enthält.
  * G ist genau dann zweifach zusammenhängend, wenn G zusammenhängend ist und mindestens drei Knoten enthält, welche aber keine Zerlegungsknoten sind.

Mehrfacher Zusammenhang und disjunkte Wege

* **Definition 9**:
  Ein schlichter Graph G heißt k–**fach zusammenhängend** (wobei $k \geq 1$), wenn $\kappa(G) \geq k$.
* Bemerkungen:
  * G ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn G zusammenhängend ist und mindestens zwei Knoten enthält.
  * G ist genau dann zweifach zusammenhängend, wenn G zusammenhängend ist und mindestens drei Knoten enthält, welche aber keine Zerlegungsknoten sind.
  * Ist G k–fach zusammenhängend und ist e eine Kante in G, so ist $G - e$ i.A. nur $(k-1)$–fach zusammenhängend.

Mehrfacher Zusammenhang und disjunkte Wege

* **Definition 9**:
  Ein schlichter Graph G heißt k–**fach zusammenhängend** (wobei $k \geq 1$), wenn $\kappa(G) \geq k$.
* Bemerkungen:
  * G ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn G zusammenhängend ist und mindestens zwei Knoten enthält.
  * G ist genau dann zweifach zusammenhängend, wenn G zusammenhängend ist und mindestens drei Knoten enthält, welche aber keine Zerlegungsknoten sind.
  * Ist G k–fach zusammenhängend und ist e eine Kante in G, so ist $G - e$ i.A. nur $(k-1)$–fach zusammenhängend.

    Angenommen, $G - e$ wäre nicht mehr $(k-1)$–fach zusammenhängend.

Mehrfacher Zusammenhang und disjunkte Wege

* **Definition 9**:
  Ein schlichter Graph G heißt k–**fach zusammenhängend** (wobei $k \geq 1$), wenn $\kappa(G) \geq k$.
* Bemerkungen:
  * G ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn G zusammenhängend ist und mindestens zwei Knoten enthält.
  * G ist genau dann zweifach zusammenhängend, wenn G zusammenhängend ist und mindestens drei Knoten enthält, welche aber keine Zerlegungsknoten sind.
  * Ist G k–fach zusammenhängend und ist e eine Kante in G, so ist $G - e$ i.A. nur $(k-1)$–fach zusammenhängend.

    Angenommen, $G - e$ wäre nicht mehr $(k-1)$–fach zusammenhängend.

    Dann gibt es $k - 2$ Knoten in $S \subset V(G - e)$, so dass $(G - e) - S$ unzusammenhängend bzw. K_1 wird.

Mehrfacher Zusammenhang und disjunkte Wege

* **Definition 9**:
  Ein schlichter Graph G heißt k–**fach zusammenhängend** (wobei $k \geq 1$), wenn $\kappa(G) \geq k$.
* Bemerkungen:
  * G ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn G zusammenhängend ist und mindestens zwei Knoten enthält.
  * G ist genau dann zweifach zusammenhängend, wenn G zusammenhängend ist und mindestens drei Knoten enthält, welche aber keine Zerlegungsknoten sind.
  * Ist G k–fach zusammenhängend und ist e eine Kante in G, so ist $G - e$ i.A. nur $(k-1)$–fach zusammenhängend.

    Angenommen, $G - e$ wäre nicht mehr $(k-1)$–fach zusammenhängend.

    Dann gibt es $k - 2$ Knoten in $S \subset V(G - e)$, so dass $(G - e) - S$ unzusammenhängend bzw. K_1 wird.

    Sei $e = \{u, v\}$. Dann ist $S' := S \cup \{u\}$ eine Menge mit höchstens $k - 1$ Knoten, so dass $G - S'$ unzusammenhängend ist. Also ist G nicht k–fach zusammenhängend.

Mehrfacher Zusammenhang und disjunkte Wege

* **Definition 9**:
  Ein schlichter Graph G heißt **k–fach zusammenhängend** (wobei $k \geq 1$), wenn $\kappa(G) \geq k$.
* Bemerkungen:
  * G ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn G zusammenhängend ist und mindestens zwei Knoten enthält.
  * G ist genau dann zweifach zusammenhängend, wenn G zusammenhängend ist und mindestens drei Knoten enthält, welche aber keine Zerlegungsknoten sind.
  * Ist G k–fach zusammenhängend und ist e eine Kante in G, so ist $G - e$ i.A. nur $(k-1)$–fach zusammenhängend.

    Angenommen, $G - e$ wäre nicht mehr $(k-1)$–fach zusammenhängend.

    Dann gibt es $k-2$ Knoten in $S \subset V(G-e)$, so dass $(G-e) - S$ unzusammenhängend bzw. K_1 wird.

    Sei $e = \{u, v\}$. Dann ist $S' := S \cup \{u\}$ eine Menge mit höchstens $k-1$ Knoten, so dass $G - S'$ unzusammenhängend ist. Also ist G nicht k–fach zusammenhängend.

    Beispiel: G ist 3–fach zusammenhängend. Entfernt man z.B. $e = \{s, y\}$, so ist $G - e$ nur noch zweifach zusammenhängend.

Mehrfacher Zusammenhang und disjunkte Wege

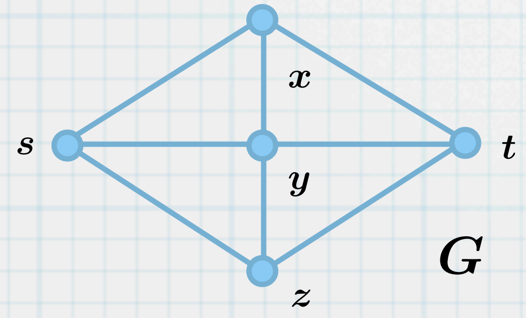
* **Definition 9**:
  Ein schlichter Graph G heißt k–**fach zusammenhängend** (wobei $k \geq 1$), wenn $\kappa(G) \geq k$.
* Bemerkungen:
  * G ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn G zusammenhängend ist und mindestens zwei Knoten enthält.
  * G ist genau dann zweifach zusammenhängend, wenn G zusammenhängend ist und mindestens drei Knoten enthält, welche aber keine Zerlegungsknoten sind.
  * Ist G k–fach zusammenhängend und ist e eine Kante in G, so ist $G - e$ i.A. nur $(k-1)$–fach zusammenhängend.

    Angenommen, $G - e$ wäre nicht mehr $(k-1)$–fach zusammenhängend.

    Dann gibt es $k-2$ Knoten in $S \subset V(G-e)$, so dass $(G-e) - S$ unzusammenhängend bzw. K_1 wird.

    Sei $e = \{u, v\}$. Dann ist $S' := S \cup \{u\}$ eine Menge mit höchstens $k-1$ Knoten, so dass $G - S'$ unzusammenhängend ist. Also ist G nicht k–fach zusammenhängend.

    Beispiel: G ist 3–fach zusammenhängend. Entfernt man z.B. $e = \{s, y\}$, so ist $G - e$ nur noch zweifach zusammenhängend.



Mehrfacher Zusammenhang und disjunkte Wege

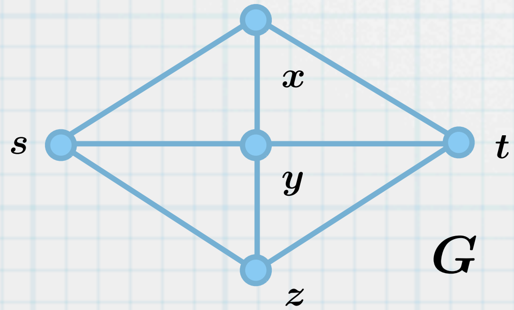
* **Definition 9**:
Ein schlichter Graph G heißt k–**fach zusammenhängend** (wobei $k \geq 1$), wenn $\kappa(G) \geq k$.
* Bemerkungen:
  * G ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn G zusammenhängend ist und mindestens zwei Knoten enthält.
  * G ist genau dann zweifach zusammenhängend, wenn G zusammenhängend ist und mindestens drei Knoten enthält, welche aber keine Zerlegungsknoten sind.
  * Ist G k–fach zusammenhängend und ist e eine Kante in G, so ist $G - e$ i.A. nur $(k-1)$–fach zusammenhängend.

    Angenommen, $G - e$ wäre nicht mehr $(k-1)$–fach zusammenhängend.

    Dann gibt es $k - 2$ Knoten in $S \subset V(G - e)$, so dass $(G - e) - S$ unzusammenhängend bzw. K_1 wird.

    Sei $e = \{u, v\}$. Dann ist $S' := S \cup \{u\}$ eine Menge mit höchstens $k - 1$ Knoten, so dass $G - S'$ unzusammenhängend ist. Also ist G nicht k–fach zusammenhängend.

    Beispiel: G ist 3–fach zusammenhängend. Entfernt man z.B. $e = \{s, y\}$, so ist $G - e$ nur noch zweifach zusammenhängend.



* **Definition 10**:
Sei G ein Graph und u, v zwei Knoten. Eine Menge von u–v–Wegen $\{P_1, \ldots, P_n\}$ wird als **innerlich disjunkt** bezeichnet, wenn für jedes Paar P_i, P_j aus dieser Menge u und v die einzigen gemeinsamen Knoten von P_i, P_j sind.

Satz von Whitney

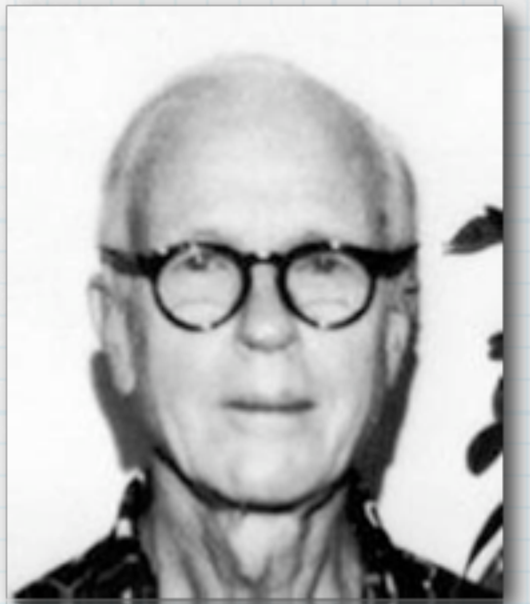
Satz von Whitney

* **Satz 11** (Whitney, 1932):
  Sei G ein schlichter Graph mit mindestens 3 Knoten. Dann ist G genau dann zweifach zusammenhängend, wenn es für jedes Paar unterschiedlicher Knoten u und v von G zwei innerlich disjunkte u–v–Wege gibt.

Satz von Whitney

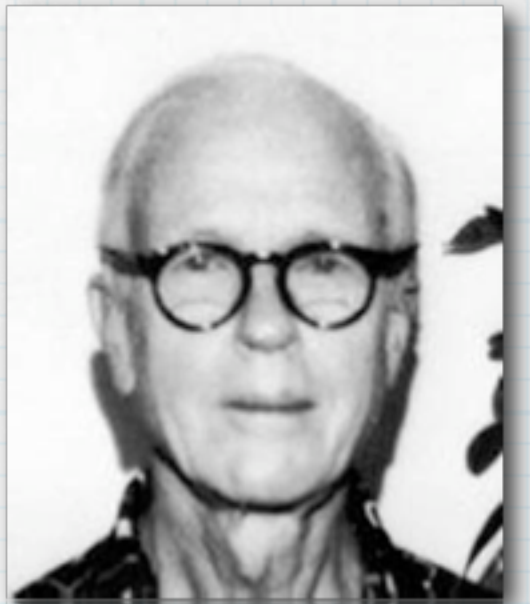
* **Satz 11** (Whitney, 1932):
  Sei G ein schlichter Graph mit mindestens 3 Knoten. Dann ist G genau dann zweifach zusammenhängend, wenn es für jedes Paar unterschiedlicher Knoten u und v von G zwei innerlich disjunkte u–v–Wege gibt.

Satz von Whitney



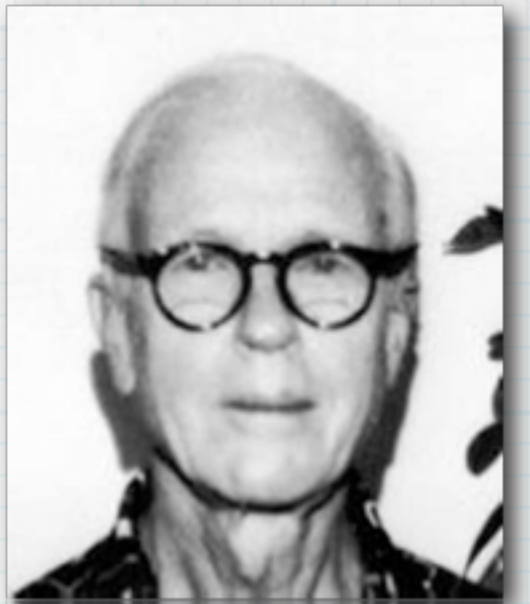
* **Satz 11** (Whitney, 1932):
  Sei G ein schlichter Graph mit mindestens 3 Knoten. Dann ist G genau dann zweifach zusammenhängend, wenn es für jedes Paar unterschiedlicher Knoten u und v von G zwei innerlich disjunkte u–v–Wege gibt.

Satz von Whitney



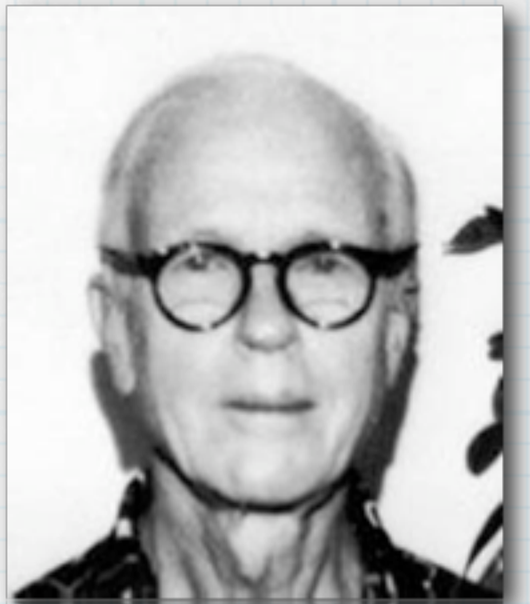
* **Satz 11** (Whitney, 1932):
  Sei G ein schlichter Graph mit mindestens 3 Knoten. Dann ist G genau dann zweifach zusammenhängend, wenn es für jedes Paar unterschiedlicher Knoten u und v von G zwei innerlich disjunkte u–v–Wege gibt.
* Beweis:

Satz von Whitney



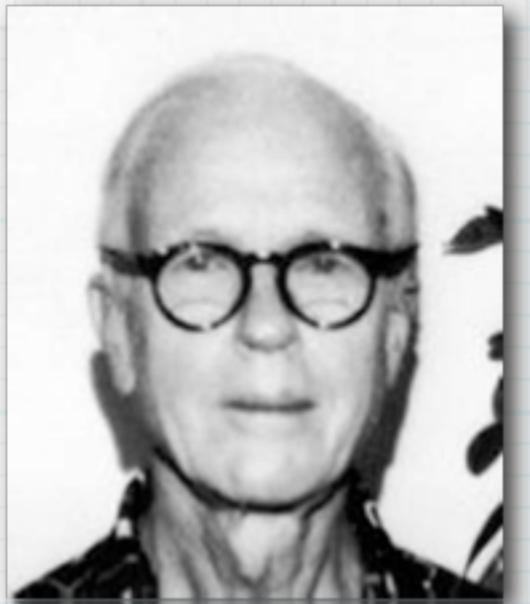
- **Satz 11** (Whitney, 1932):
  Sei G ein schlichter Graph mit mindestens 3 Knoten. Dann ist G genau dann zweifach zusammenhängend, wenn es für jedes Paar unterschiedlicher Knoten u und v von G zwei innerlich disjunkte u–v–Wege gibt.
- Beweis:
  ($\Leftarrow$): Für jedes Knotenpaar u, v gebe es zwei innerlich disjunkte u–v–Wege.

Satz von Whitney



* **Satz 11** (Whitney, 1932):
  Sei G ein schlichter Graph mit mindestens 3 Knoten. Dann ist G genau dann zweifach zusammenhängend, wenn es für jedes Paar unterschiedlicher Knoten u und v von G zwei innerlich disjunkte u–v–Wege gibt.
* Beweis:
  (⇐): Für jedes Knotenpaar u, v gebe es zwei innerlich disjunkte u–v–Wege.
    Dann ist G zusammenhängend.

Satz von Whitney

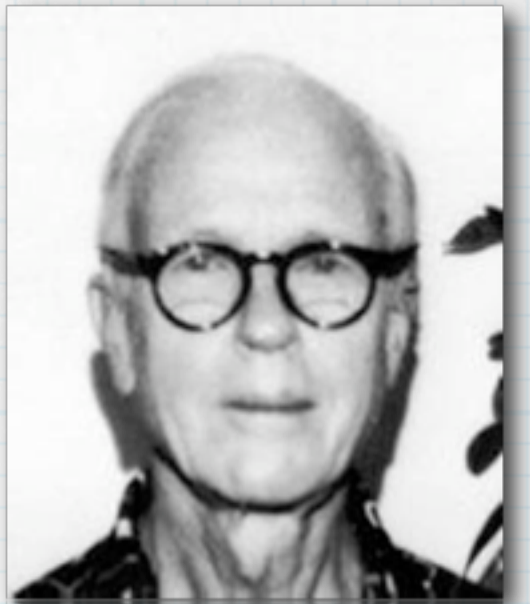


* **Satz 11** (Whitney, 1932):
  Sei G ein schlichter Graph mit mindestens 3 Knoten. Dann ist G genau dann zweifach zusammenhängend, wenn es für jedes Paar unterschiedlicher Knoten u und v von G zwei innerlich disjunkte u–v–Wege gibt.
* Beweis:
  - ($\Leftarrow$): Für jedes Knotenpaar u, v gebe es zwei innerlich disjunkte u–v–Wege.
    - Dann ist G zusammenhängend.
    - Bleibt zu zeigen: es gibt keine Zerlegungsknoten in G.

Satz von Whitney

- **Satz 11** (Whitney, 1932):
  Sei G ein schlichter Graph mit mindestens 3 Knoten. Dann ist G genau dann zweifach zusammenhängend, wenn es für jedes Paar unterschiedlicher Knoten u und v von G zwei innerlich disjunkte u–v–Wege gibt.
- Beweis:
  - ($\Leftarrow$): Für jedes Knotenpaar u, v gebe es zwei innerlich disjunkte u–v–Wege.
    - Dann ist G zusammenhängend.
    - Bleibt zu zeigen: es gibt keine Zerlegungsknoten in G.
    - Angenommen, w ist Zerlegungsknoten.

Satz von Whitney



- **Satz 11** (Whitney, 1932):
  Sei G ein schlichter Graph mit mindestens 3 Knoten. Dann ist G genau dann zweifach zusammenhängend, wenn es für jedes Paar unterschiedlicher Knoten u und v von G zwei innerlich disjunkte u–v–Wege gibt.
- Beweis:

  ($\Leftarrow$): Für jedes Knotenpaar u, v gebe es zwei innerlich disjunkte u–v–Wege.

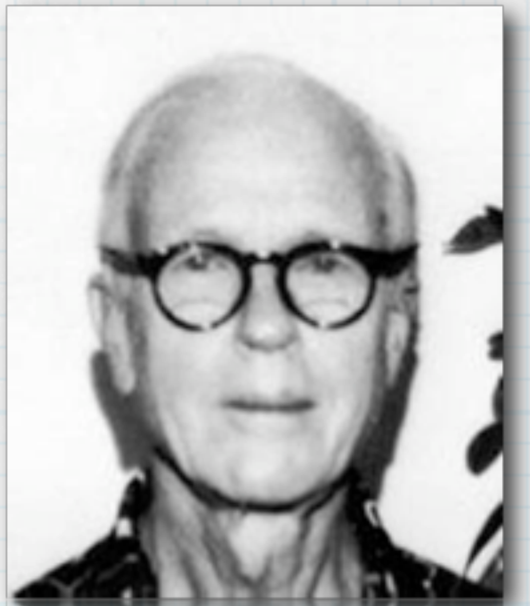
  Dann ist G zusammenhängend.

  Bleibt zu zeigen: es gibt keine Zerlegungsknoten in G.

  Angenommen, w ist Zerlegungsknoten.

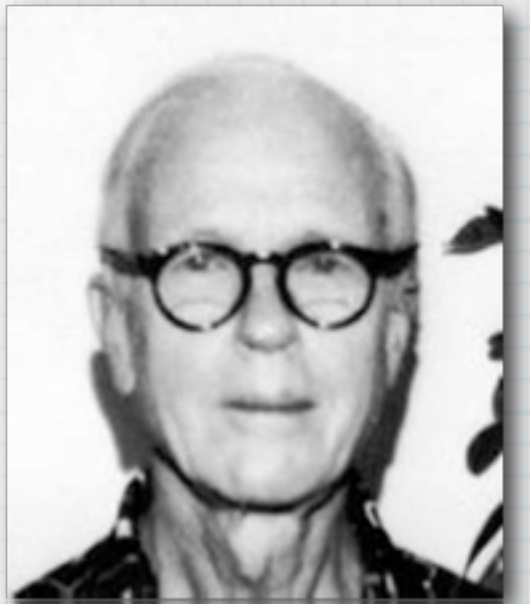
  Nach Satz 5 gibt es dann zwei weitere Knoten u, v $(u \neq v)$, so dass w in jedem u–v–Weg enthalten ist.

Satz von Whitney



* **Satz 11** (Whitney, 1932):
  Sei G ein schlichter Graph mit mindestens 3 Knoten. Dann ist G genau dann zweifach zusammenhängend, wenn es für jedes Paar unterschiedlicher Knoten u und v von G zwei innerlich disjunkte u–v–Wege gibt.
* Beweis:
  - ($\Leftarrow$): Für jedes Knotenpaar u, v gebe es zwei innerlich disjunkte u–v–Wege.
    - Dann ist G zusammenhängend.
    - Bleibt zu zeigen: es gibt keine Zerlegungsknoten in G.
    - Angenommen, w ist Zerlegungsknoten.
    - Nach Satz 5 gibt es dann zwei weitere Knoten u, v ($u \neq v$), so dass w in jedem u–v–Weg enthalten ist.
    - Nach Annahme gibt es jedoch zwei innerlich disjunkte u–v–Wege.

Satz von Whitney



- **Satz 11** (Whitney, 1932):
  Sei G ein schlichter Graph mit mindestens 3 Knoten. Dann ist G genau dann zweifach zusammenhängend, wenn es für jedes Paar unterschiedlicher Knoten u und v von G zwei innerlich disjunkte u–v–Wege gibt.
- Beweis:

  ($\Leftarrow$): Für jedes Knotenpaar u, v gebe es zwei innerlich disjunkte u–v–Wege.

  Dann ist G zusammenhängend.

  Bleibt zu zeigen: es gibt keine Zerlegungsknoten in G.

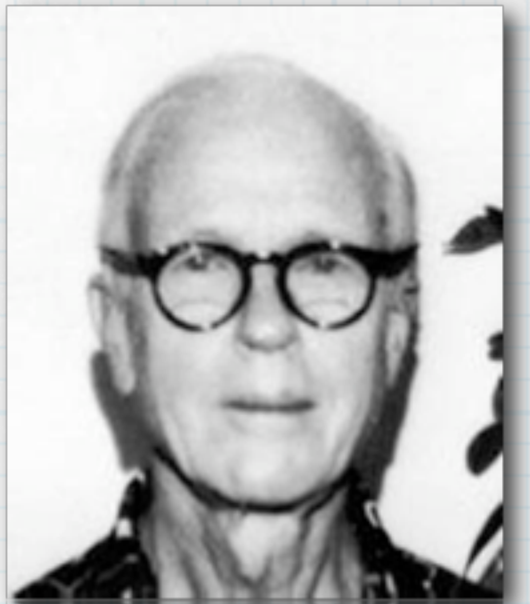
  Angenommen, w ist Zerlegungsknoten.

  Nach Satz 5 gibt es dann zwei weitere Knoten u, v $(u \neq v)$, so dass w in jedem u–v–Weg enthalten ist.

  Nach Annahme gibt es jedoch zwei innerlich disjunkte u–v–Wege.

  Also kann w in einem der beiden Wege nicht enthalten sein.

Satz von Whitney



* **Satz 11** (Whitney, 1932):
  Sei G ein schlichter Graph mit mindestens 3 Knoten. Dann ist G genau dann zweifach zusammenhängend, wenn es für jedes Paar unterschiedlicher Knoten u und v von G zwei innerlich disjunkte u–v–Wege gibt.
* Beweis:

  ($\Leftarrow$): Für jedes Knotenpaar u, v gebe es zwei innerlich disjunkte u–v–Wege.

  Dann ist G zusammenhängend.

  Bleibt zu zeigen: es gibt keine Zerlegungsknoten in G.

  Angenommen, w ist Zerlegungsknoten.

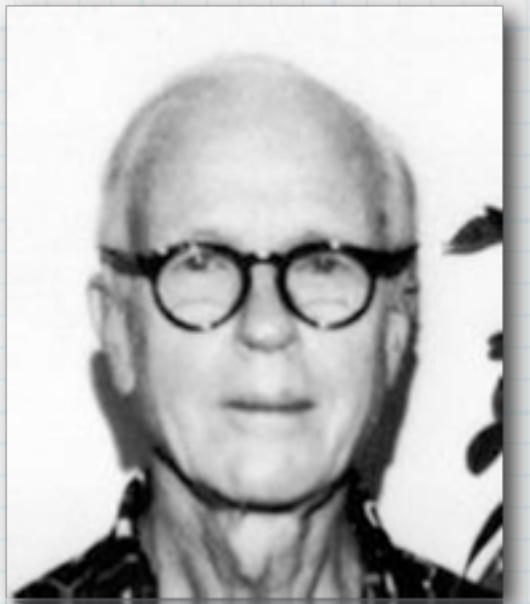
  Nach Satz 5 gibt es dann zwei weitere Knoten u, v $(u \neq v)$, so dass w in jedem u–v–Weg enthalten ist.

  Nach Annahme gibt es jedoch zwei innerlich disjunkte u–v–Wege.

  Also kann w in einem der beiden Wege nicht enthalten sein.

  Somit ist w nicht in jedem u–v–Weg. Widerspruch.

Satz von Whitney



* **Satz 11** (Whitney, 1932):
  Sei G ein schlichter Graph mit mindestens 3 Knoten. Dann ist G genau dann zweifach zusammenhängend, wenn es für jedes Paar unterschiedlicher Knoten u und v von G zwei innerlich disjunkte u–v–Wege gibt.
* Beweis:

  ($\Leftarrow$): Für jedes Knotenpaar u, v gebe es zwei innerlich disjunkte u–v–Wege.

  Dann ist G zusammenhängend.

  Bleibt zu zeigen: es gibt keine Zerlegungsknoten in G.

  Angenommen, w ist Zerlegungsknoten.

  Nach Satz 5 gibt es dann zwei weitere Knoten u, v $(u \neq v)$, so dass w in jedem u–v–Weg enthalten ist.

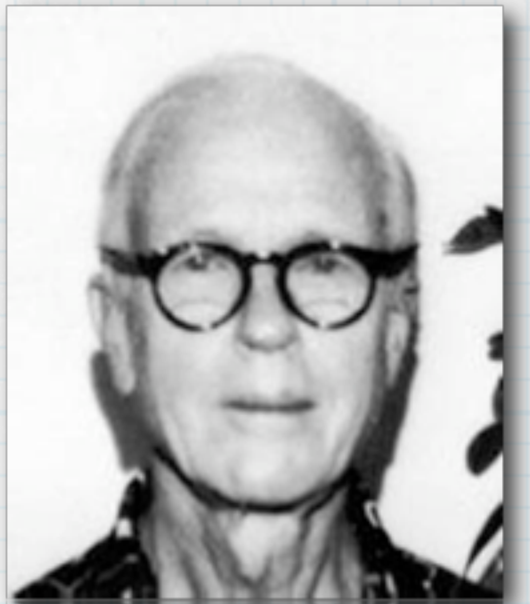
  Nach Annahme gibt es jedoch zwei innerlich disjunkte u–v–Wege.

  Also kann w in einem der beiden Wege nicht enthalten sein.

  Somit ist w nicht in jedem u–v–Weg. Widerspruch.

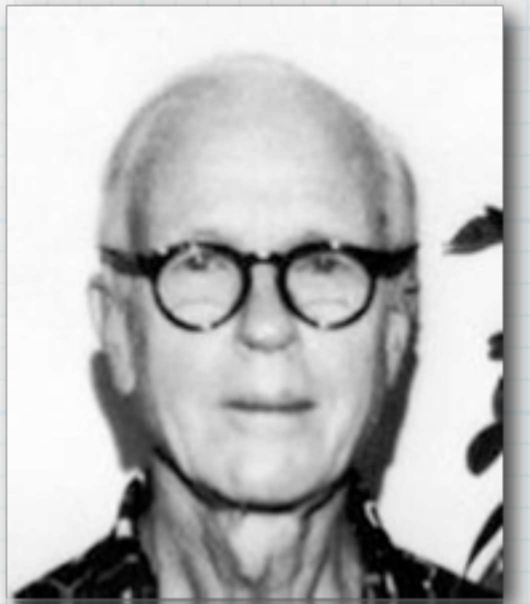
  ($\Rightarrow$): Sei G zweifach zusammenhängend.

Satz von Whitney



* **Satz 11** (Whitney, 1932):
  Sei G ein schlichter Graph mit mindestens 3 Knoten. Dann ist G genau dann zweifach zusammenhängend, wenn es für jedes Paar unterschiedlicher Knoten u und v von G zwei innerlich disjunkte u–v–Wege gibt.
* Beweis:
  (⇐): Für jedes Knotenpaar u, v gebe es zwei innerlich disjunkte u–v–Wege.
  Dann ist G zusammenhängend.
  Bleibt zu zeigen: es gibt keine Zerlegungsknoten in G.
  Angenommen, w ist Zerlegungsknoten.
  Nach Satz 5 gibt es dann zwei weitere Knoten u, v $(u \neq v)$, so dass w in jedem u–v–Weg enthalten ist.
  Nach Annahme gibt es jedoch zwei innerlich disjunkte u–v–Wege.
  Also kann w in einem der beiden Wege nicht enthalten sein.
  Somit ist w nicht in jedem u–v–Weg. Widerspruch.
  (⇒): Sei G zweifach zusammenhängend.
  Seien u und v zwei Knoten von G.

Satz von Whitney



- **Satz 11** (Whitney, 1932):
  Sei G ein schlichter Graph mit mindestens 3 Knoten. Dann ist G genau dann zweifach zusammenhängend, wenn es für jedes Paar unterschiedlicher Knoten u und v von G zwei innerlich disjunkte u–v–Wege gibt.
- Beweis:

  ($\Leftarrow$): Für jedes Knotenpaar u, v gebe es zwei innerlich disjunkte u–v–Wege.

  Dann ist G zusammenhängend.

  Bleibt zu zeigen: es gibt keine Zerlegungsknoten in G.

  Angenommen, w ist Zerlegungsknoten.

  Nach Satz 5 gibt es dann zwei weitere Knoten u, v $(u \neq v)$, so dass w in jedem u–v–Weg enthalten ist.

  Nach Annahme gibt es jedoch zwei innerlich disjunkte u–v–Wege.

  Also kann w in einem der beiden Wege nicht enthalten sein.

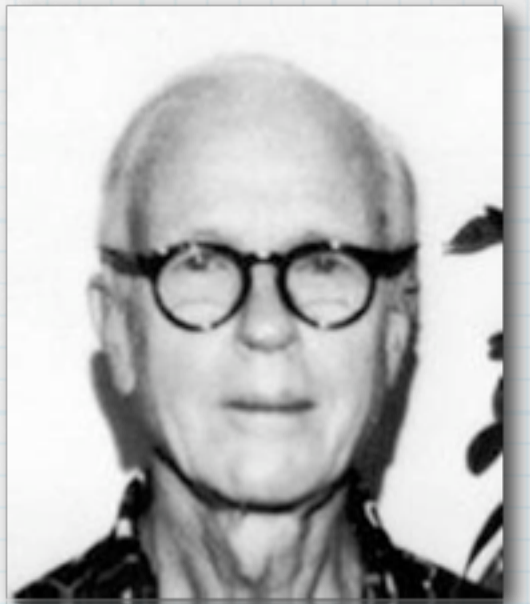
  Somit ist w nicht in jedem u–v–Weg. Widerspruch.

  ($\Rightarrow$): Sei G zweifach zusammenhängend.

  Seien u und v zwei Knoten von G.

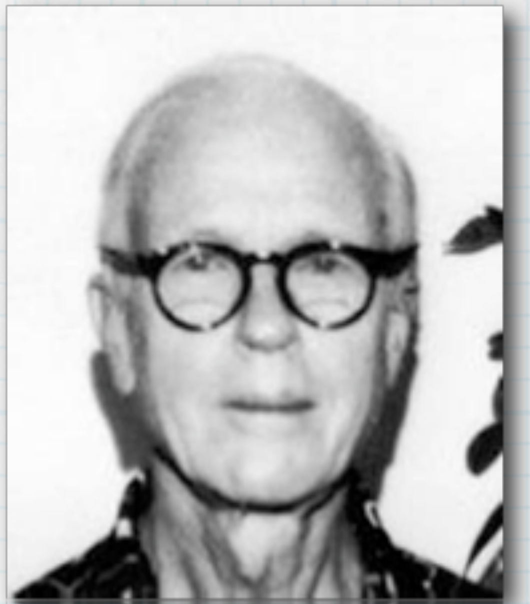
  Beweise durch vollständige Induktion nach $d(u, v)$, der Entfernung von u und v, dass es zwei innerlich disjunkte u–v–Wege in G gibt.

Satz von Whitney



* **Satz 11** (Whitney, 1932):
Sei G ein schlichter Graph mit mindestens 3 Knoten. Dann ist G genau dann zweifach zusammenhängend, wenn es für jedes Paar unterschiedlicher Knoten u und v von G zwei innerlich disjunkte u–v–Wege gibt.
* Beweis:
  (⇐): Für jedes Knotenpaar u, v gebe es zwei innerlich disjunkte u–v–Wege.
    Dann ist G zusammenhängend.
    Bleibt zu zeigen: es gibt keine Zerlegungsknoten in G.
    Angenommen, w ist Zerlegungsknoten.
    Nach Satz 5 gibt es dann zwei weitere Knoten u, v ($u \neq v$), so dass w in jedem u–v–Weg enthalten ist.
    Nach Annahme gibt es jedoch zwei innerlich disjunkte u–v–Wege.
    Also kann w in einem der beiden Wege nicht enthalten sein.
    Somit ist w nicht in jedem u–v–Weg. Widerspruch.
  (⇒): Sei G zweifach zusammenhängend.
    Seien u und v zwei Knoten von G.
    Beweise durch vollständige Induktion nach $d(u, v)$, der Entfernung von u und v, dass es zwei innerlich disjunkte u–v–Wege in G gibt.
    Induktionsanfang, $d(u, v) = 1$.

Satz von Whitney



* **Satz 11** (Whitney, 1932):
  Sei G ein schlichter Graph mit mindestens 3 Knoten. Dann ist G genau dann zweifach zusammenhängend, wenn es für jedes Paar unterschiedlicher Knoten u und v von G zwei innerlich disjunkte u–v–Wege gibt.
* Beweis:

  ($\Leftarrow$): Für jedes Knotenpaar u, v gebe es zwei innerlich disjunkte u–v–Wege.

  Dann ist G zusammenhängend.

  Bleibt zu zeigen: es gibt keine Zerlegungsknoten in G.

  Angenommen, w ist Zerlegungsknoten.

  Nach Satz 5 gibt es dann zwei weitere Knoten u, v $(u \neq v)$, so dass w in jedem u–v–Weg enthalten ist.

  Nach Annahme gibt es jedoch zwei innerlich disjunkte u–v–Wege.

  Also kann w in einem der beiden Wege nicht enthalten sein.

  Somit ist w nicht in jedem u–v–Weg. Widerspruch.

  ($\Rightarrow$): Sei G zweifach zusammenhängend.

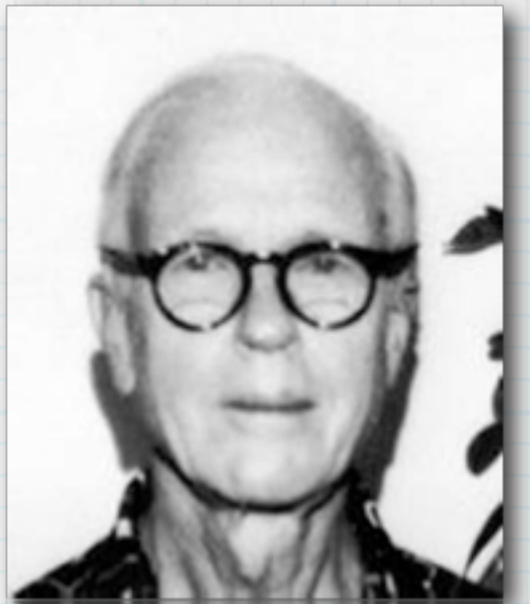
  Seien u und v zwei Knoten von G.

  Beweise durch vollständige Induktion nach $d(u,v)$, der Entfernung von u und v, dass es zwei innerlich disjunkte u–v–Wege in G gibt.

  Induktionsanfang, $d(u,v) = 1$.

  Dann sind u und v durch eine Kante $e = \{u, v\}$ verbunden.

Satz von Whitney



* **Satz 11** (Whitney, 1932):
  Sei G ein schlichter Graph mit mindestens 3 Knoten. Dann ist G genau dann zweifach zusammenhängend, wenn es für jedes Paar unterschiedlicher Knoten u und v von G zwei innerlich disjunkte u–v–Wege gibt.
* Beweis:

  ($\Leftarrow$): Für jedes Knotenpaar u, v gebe es zwei innerlich disjunkte u–v–Wege.

  Dann ist G zusammenhängend.

  Bleibt zu zeigen: es gibt keine Zerlegungsknoten in G.

  Angenommen, w ist Zerlegungsknoten.

  Nach Satz 5 gibt es dann zwei weitere Knoten u, v ($u \neq v$), so dass w in jedem u–v–Weg enthalten ist.

  Nach Annahme gibt es jedoch zwei innerlich disjunkte u–v–Wege.

  Also kann w in einem der beiden Wege nicht enthalten sein.

  Somit ist w nicht in jedem u–v–Weg. Widerspruch.

  ($\Rightarrow$): Sei G zweifach zusammenhängend.

  Seien u und v zwei Knoten von G.

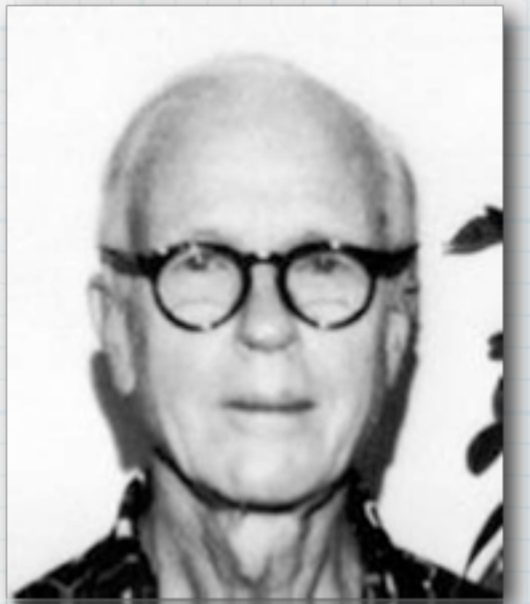
  Beweise durch vollständige Induktion nach $d(u, v)$, der Entfernung von u und v, dass es zwei innerlich disjunkte u–v–Wege in G gibt.

  Induktionsanfang, $d(u, v) = 1$.

  Dann sind u und v durch eine Kante $e = \{u, v\}$ verbunden.

  Da G keine Zerlegungsknoten enthält, ist e nach Satz 7 keine Brücke.

Satz von Whitney



- **Satz 11** (Whitney, 1932):
  Sei G ein schlichter Graph mit mindestens 3 Knoten. Dann ist G genau dann zweifach zusammenhängend, wenn es für jedes Paar unterschiedlicher Knoten u und v von G zwei innerlich disjunkte u–v–Wege gibt.
- Beweis:

  ($\Leftarrow$): Für jedes Knotenpaar u, v gebe es zwei innerlich disjunkte u–v–Wege.

  Dann ist G zusammenhängend.

  Bleibt zu zeigen: es gibt keine Zerlegungsknoten in G.

  Angenommen, w ist Zerlegungsknoten.

  Nach Satz 5 gibt es dann zwei weitere Knoten u, v $(u \neq v)$, so dass w in jedem u–v–Weg enthalten ist.

  Nach Annahme gibt es jedoch zwei innerlich disjunkte u–v–Wege.

  Also kann w in einem der beiden Wege nicht enthalten sein.

  Somit ist w nicht in jedem u–v–Weg. Widerspruch.

  ($\Rightarrow$): Sei G zweifach zusammenhängend.

  Seien u und v zwei Knoten von G.

  Beweise durch vollständige Induktion nach $d(u, v)$, der Entfernung von u und v, dass es zwei innerlich disjunkte u–v–Wege in G gibt.

  Induktionsanfang, $d(u, v) = 1$.

  Dann sind u und v durch eine Kante $e = \{u, v\}$ verbunden.

  Da G keine Zerlegungsknoten enthält, ist e nach Satz 7 keine Brücke.

  Somit gibt es einen u–v–Weg P, der nicht identisch mit Weg e, insbesondere innerlich disjunkt zu e, ist.

Satz von Whitney (Forts.)

Satz von Whitney (Forts.)

* Beweis (Forts.):

Satz von Whitney (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  (⇒): Sei nun $d(u,v) = k \geq 2$.

Satz von Whitney (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  (⇒): Sei nun $d(u,v) = k \geq 2$.
    Für alle Knotenpaare x, y mit $d(x,y) < k$ gebe es zwei innerlich disjunkte Wege.

Satz von Whitney (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  ($\Rightarrow$): Sei nun $d(u,v) = k \geq 2$.
  Für alle Knotenpaare x, y mit $d(x,y) < k$ gebe es zwei innerlich disjunkte Wege.
  Sei P ein Weg der Länge k von u nach v.

Satz von Whitney (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  (⇒): Sei nun $d(u, v) = k \geq 2$.
  Für alle Knotenpaare x, y mit $d(x, y) < k$ gebe es zwei innerlich disjunkte Wege.
  Sei P ein Weg der Länge k von u nach v.
  Zu zeigen ist: es gibt noch einen weiteren, innerlich disjunkten u–v–Weg.

Satz von Whitney (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  - (⇒): Sei nun $d(u,v) = k \geq 2$.
    - Für alle Knotenpaare x, y mit $d(x,y) < k$ gebe es zwei innerlich disjunkte Wege.
    - Sei P ein Weg der Länge k von u nach v.
    - Zu zeigen ist: es gibt noch einen weiteren, innerlich disjunkten u–v–Weg.
    - Sei w der vorletzte Knoten in P (vor v). Dann ist $d(u,w) = k - 1$.

Satz von Whitney (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  (⇒): Sei nun $d(u,v) = k \geq 2$.
  Für alle Knotenpaare x, y mit $d(x,y) < k$ gebe es zwei innerlich disjunkte Wege.
  Sei P ein Weg der Länge k von u nach v.
  Zu zeigen ist: es gibt noch einen weiteren, innerlich disjunkten u–v–Weg.
  Sei w der vorletzte Knoten in P (vor v). Dann ist $d(u,w) = k - 1$.
  Nach Induktionsannahme gibt es daher zwei innerlich disjunkte u–w–Wege Q_1, Q_2.

Satz von Whitney (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  (⇒): Sei nun $d(u,v) = k \geq 2$.
  Für alle Knotenpaare x, y mit $d(x,y) < k$ gebe es zwei innerlich disjunkte Wege.
  Sei P ein Weg der Länge k von u nach v.
  Zu zeigen ist: es gibt noch einen weiteren, innerlich disjunkten u–v–Weg.
  Sei w der vorletzte Knoten in P (vor v). Dann ist $d(u,w) = k - 1$.
  Nach Induktionsannahme gibt es daher zwei innerlich disjunkte u–w–Wege Q_1, Q_2.
  Da G zweifach zusammenhängend ist, ist insbesondere w kein Zerlegungsknoten.

Satz von Whitney (Forts.)

* Beweis (Forts.):

  ($\Rightarrow$): Sei nun $d(u,v) = k \geq 2$.

  Für alle Knotenpaare x, y mit $d(x,y) < k$ gebe es zwei innerlich disjunkte Wege.

  Sei P ein Weg der Länge k von u nach v.

  Zu zeigen ist: es gibt noch einen weiteren, innerlich disjunkten u–v–Weg.

  Sei w der vorletzte Knoten in P (vor v). Dann ist $d(u,w) = k - 1$.

  Nach Induktionsannahme gibt es daher zwei innerlich disjunkte u–w–Wege Q_1, Q_2.

  Da G zweifach zusammenhängend ist, ist insbesondere w kein Zerlegungsknoten.

  Also ist $G - w$ zusammenhängend.

Satz von Whitney (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  (⇒): Sei nun $d(u,v) = k \geq 2$.
  Für alle Knotenpaare x, y mit $d(x,y) < k$ gebe es zwei innerlich disjunkte Wege.
  Sei P ein Weg der Länge k von u nach v.
  Zu zeigen ist: es gibt noch einen weiteren, innerlich disjunkten u–v–Weg.
  Sei w der vorletzte Knoten in P (vor v). Dann ist $d(u,w) = k - 1$.
  Nach Induktionsannahme gibt es daher zwei innerlich disjunkte u–w–Wege Q_1, Q_2.
  Da G zweifach zusammenhängend ist, ist insbesondere w kein Zerlegungsknoten.
  Also ist $G - w$ zusammenhängend.
  Es gibt daher einen u–v–Weg P', der nicht durch w verläuft.

Satz von Whitney (Forts.)

* Beweis (Forts.):

  ($\Rightarrow$): Sei nun $d(u, v) = k \geq 2$.

  Für alle Knotenpaare x, y mit $d(x, y) < k$ gebe es zwei innerlich disjunkte Wege.

  Sei P ein Weg der Länge k von u nach v.

  Zu zeigen ist: es gibt noch einen weiteren, innerlich disjunkten u–v–Weg.

  Sei w der vorletzte Knoten in P (vor v). Dann ist $d(u, w) = k - 1$.

  Nach Induktionsannahme gibt es daher zwei innerlich disjunkte u–w–Wege Q_1, Q_2.

  Da G zweifach zusammenhängend ist, ist insbesondere w kein Zerlegungsknoten.

  Also ist $G - w$ zusammenhängend.

  Es gibt daher einen u–v–Weg P', der nicht durch w verläuft.

  Sei x der letzte Knoten von P', der auch in Q_1 oder in Q_2 enthalten ist. Einen solchen Knoten gibt es, da zumindest der Endknoten u in allen drei Wegen P', Q_1, Q_2 ist. O.B.d.A. sei x in Q_1.

Satz von Whitney (Forts.)

* Beweis (Forts.):

  (⇒): Sei nun $d(u,v) = k \geq 2$.

  Für alle Knotenpaare x, y mit $d(x,y) < k$ gebe es zwei innerlich disjunkte Wege.

  Sei P ein Weg der Länge k von u nach v.

  Zu zeigen ist: es gibt noch einen weiteren, innerlich disjunkten u–v–Weg.

  Sei w der vorletzte Knoten in P (vor v). Dann ist $d(u,w) = k - 1$.

  Nach Induktionsannahme gibt es daher zwei innerlich disjunkte u–w–Wege Q_1, Q_2.

  Da G zweifach zusammenhängend ist, ist insbesondere w kein Zerlegungsknoten.

  Also ist $G - w$ zusammenhängend.

  Es gibt daher einen u–v–Weg P', der nicht durch w verläuft.

  Sei x der letzte Knoten von P', der auch in Q_1 oder in Q_2 enthalten ist. Einen solchen Knoten gibt es, da zumindest der Endknoten u in allen drei Wegen P', Q_1, Q_2 ist. O.B.d.A. sei x in Q_1.

  Sei P_1 der u–v–Weg, der durch den u–x–Abschnitt von Q_1 und den x–v–Abschnitt von P' definiert wird.

Satz von Whitney (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  (⇒): Sei nun $d(u, v) = k \geq 2$.
  Für alle Knotenpaare x, y mit $d(x, y) < k$ gebe es zwei innerlich disjunkte Wege.
  Sei P ein Weg der Länge k von u nach v.
  Zu zeigen ist: es gibt noch einen weiteren, innerlich disjunkten u–v–Weg.
  Sei w der vorletzte Knoten in P (vor v). Dann ist $d(u, w) = k - 1$.
  Nach Induktionsannahme gibt es daher zwei innerlich disjunkte u–w–Wege Q_1, Q_2.
  Da G zweifach zusammenhängend ist, ist insbesondere w kein Zerlegungsknoten.
  Also ist $G - w$ zusammenhängend.
  Es gibt daher einen u–v–Weg P', der nicht durch w verläuft.
  Sei x der letzte Knoten von P', der auch in Q_1 oder in Q_2 enthalten ist. Einen solchen Knoten gibt es, da zumindest der Endknoten u in allen drei Wegen P', Q_1, Q_2 ist. O.B.d.A. sei x in Q_1.
  Sei P_1 der u–v–Weg, der durch den u–x–Abschnitt von Q_1 und den x–v–Abschnitt von P' definiert wird.
  Sei P_2 der u–v–Weg, der durch den u–w–Weg Q_2 und die Kante $\{w, v\}$ definiert wird.

Satz von Whitney (Forts.)

* Beweis (Forts.):

  (⇒): Sei nun $d(u, v) = k \geq 2$.

  Für alle Knotenpaare x, y mit $d(x, y) < k$ gebe es zwei innerlich disjunkte Wege.

  Sei P ein Weg der Länge k von u nach v.

  Zu zeigen ist: es gibt noch einen weiteren, innerlich disjunkten u–v–Weg.

  Sei w der vorletzte Knoten in P (vor v). Dann ist $d(u, w) = k - 1$.

  Nach Induktionsannahme gibt es daher zwei innerlich disjunkte u–w–Wege Q_1, Q_2.

  Da G zweifach zusammenhängend ist, ist insbesondere w kein Zerlegungsknoten.

  Also ist $G - w$ zusammenhängend.

  Es gibt daher einen u–v–Weg P', der nicht durch w verläuft.

  Sei x der letzte Knoten von P', der auch in Q_1 oder in Q_2 enthalten ist. Einen solchen Knoten gibt es, da zumindest der Endknoten u in allen drei Wegen P', Q_1, Q_2 ist. O.B.d.A. sei x in Q_1.

  Sei P_1 der u–v–Weg, der durch den u–x–Abschnitt von Q_1 und den x–v–Abschnitt von P' definiert wird.

  Sei P_2 der u–v–Weg, der durch den u–w–Weg Q_2 und die Kante $\{w, v\}$ definiert wird.

  Aufgrund den Definitionen von Q_1, Q_2, x und P' sind die Wege P_1, P_2 dann innerlich disjunkt.

Satz von Whitney (Forts.)

* Beweis (Forts.):

  (⇒): Sei nun $d(u,v) = k \geq 2$.

  Für alle Knotenpaare x, y mit $d(x,y) < k$ gebe es zwei innerlich disjunkte Wege.

  Sei P ein Weg der Länge k von u nach v.

  Zu zeigen ist: es gibt noch einen weiteren, innerlich disjunkten u–v–Weg.

  Sei w der vorletzte Knoten in P (vor v). Dann ist $d(u,w) = k - 1$.

  Nach Induktionsannahme gibt es daher zwei innerlich disjunkte u–w–Wege Q_1, Q_2.

  Da G zweifach zusammenhängend ist, ist insbesondere w kein Zerlegungsknoten.

  Also ist $G - w$ zusammenhängend.

  Es gibt daher einen u–v–Weg P', der nicht durch w verläuft.

  Sei x der letzte Knoten von P', der auch in Q_1 oder in Q_2 enthalten ist. Einen solchen Knoten gibt es, da zumindest der Endknoten u in allen drei Wegen P', Q_1, Q_2 ist. O.B.d.A. sei x in Q_1.

  Sei P_1 der u–v–Weg, der durch den u–x–Abschnitt von Q_1 und den x–v–Abschnitt von P' definiert wird.

  Sei P_2 der u–v–Weg, der durch den u–w–Weg Q_2 und die Kante $\{w, v\}$ definiert wird.

  Aufgrund den Definitionen von Q_1, Q_2, x und P' sind die Wege P_1, P_2 dann innerlich disjunkt.

* **Korollar 12**:
  Seien u, v Knoten eines zweifach zusammenhängenden Graphen G. Dann gibt es einen Kreis K in G, der durch beide Knoten verläuft.

Satz von Whitney (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  (⇒): Sei nun $d(u,v) = k \geq 2$.
    Für alle Knotenpaare x, y mit $d(x,y) < k$ gebe es zwei innerlich disjunkte Wege.
    Sei P ein Weg der Länge k von u nach v.
    Zu zeigen ist: es gibt noch einen weiteren, innerlich disjunkten u–v–Weg.
    Sei w der vorletzte Knoten in P (vor v). Dann ist $d(u,w) = k - 1$.
    Nach Induktionsannahme gibt es daher zwei innerlich disjunkte u–w–Wege Q_1, Q_2.
    Da G zweifach zusammenhängend ist, ist insbesondere w kein Zerlegungsknoten.
    Also ist $G - w$ zusammenhängend.
    Es gibt daher einen u–v–Weg P', der nicht durch w verläuft.
    Sei x der letzte Knoten von P', der auch in Q_1 oder in Q_2 enthalten ist. Einen solchen Knoten gibt es, da zumindest der Endknoten u in allen drei Wegen P', Q_1, Q_2 ist. O.B.d.A. sei x in Q_1.
    Sei P_1 der u–v–Weg, der durch den u–x–Abschnitt von Q_1 und den x–v–Abschnitt von P' definiert wird.
    Sei P_2 der u–v–Weg, der durch den u–w–Weg Q_2 und die Kante $\{w, v\}$ definiert wird.
    Aufgrund den Definitionen von Q_1, Q_2, x und P' sind die Wege P_1, P_2 dann innerlich disjunkt.
* **Korollar 12**:
  Seien u, v Knoten eines zweifach zusammenhängenden Graphen G. Dann gibt es einen Kreis K in G, der durch beide Knoten verläuft.
* Beweis:

Satz von Whitney (Forts.)

* Beweis (Forts.):

  (⇒): Sei nun $d(u, v) = k \geq 2$.

  Für alle Knotenpaare x, y mit $d(x, y) < k$ gebe es zwei innerlich disjunkte Wege.

  Sei P ein Weg der Länge k von u nach v.

  Zu zeigen ist: es gibt noch einen weiteren, innerlich disjunkten u–v–Weg.

  Sei w der vorletzte Knoten in P (vor v). Dann ist $d(u, w) = k - 1$.

  Nach Induktionsannahme gibt es daher zwei innerlich disjunkte u–w–Wege Q_1, Q_2.

  Da G zweifach zusammenhängend ist, ist insbesondere w kein Zerlegungsknoten.

  Also ist $G - w$ zusammenhängend.

  Es gibt daher einen u–v–Weg P', der nicht durch w verläuft.

  Sei x der letzte Knoten von P', der auch in Q_1 oder in Q_2 enthalten ist. Einen solchen Knoten gibt es, da zumindest der Endknoten u in allen drei Wegen P', Q_1, Q_2 ist. O.B.d.A. sei x in Q_1.

  Sei P_1 der u–v–Weg, der durch den u–x–Abschnitt von Q_1 und den x–v–Abschnitt von P' definiert wird.

  Sei P_2 der u–v–Weg, der durch den u–w–Weg Q_2 und die Kante $\{w, v\}$ definiert wird.

  Aufgrund den Definitionen von Q_1, Q_2, x und P' sind die Wege P_1, P_2 dann innerlich disjunkt.

* **Korollar 12**:
  Seien u, v Knoten eines zweifach zusammenhängenden Graphen G. Dann gibt es einen Kreis K in G, der durch beide Knoten verläuft.

* Beweis:

  Seien P_1, P_2 zwei innerlich disjunkte u–v–Wege (diese existieren nach Satz 11).

Satz von Whitney (Forts.)

- Beweis (Forts.):

  (⇒): Sei nun $d(u, v) = k \geq 2$.

  Für alle Knotenpaare x, y mit $d(x, y) < k$ gebe es zwei innerlich disjunkte Wege.

  Sei P ein Weg der Länge k von u nach v.

  Zu zeigen ist: es gibt noch einen weiteren, innerlich disjunkten u–v–Weg.

  Sei w der vorletzte Knoten in P (vor v). Dann ist $d(u, w) = k - 1$.

  Nach Induktionsannahme gibt es daher zwei innerlich disjunkte u–w–Wege Q_1, Q_2.

  Da G zweifach zusammenhängend ist, ist insbesondere w kein Zerlegungsknoten.

  Also ist $G - w$ zusammenhängend.

  Es gibt daher einen u–v–Weg P', der nicht durch w verläuft.

  Sei x der letzte Knoten von P', der auch in Q_1 oder in Q_2 enthalten ist. Einen solchen Knoten gibt es, da zumindest der Endknoten u in allen drei Wegen P', Q_1, Q_2 ist. O.B.d.A. sei x in Q_1.

  Sei P_1 der u–v–Weg, der durch den u–x–Abschnitt von Q_1 und den x–v–Abschnitt von P' definiert wird.

  Sei P_2 der u–v–Weg, der durch den u–w–Weg Q_2 und die Kante $\{w, v\}$ definiert wird.

  Aufgrund den Definitionen von Q_1, Q_2, x und P' sind die Wege P_1, P_2 dann innerlich disjunkt.

- **Korollar 12**:
  Seien u, v Knoten eines zweifach zusammenhängenden Graphen G. Dann gibt es einen Kreis K in G, der durch beide Knoten verläuft.

- Beweis:

  Seien P_1, P_2 zwei innerlich disjunkte u–v–Wege (diese existieren nach Satz 11).

  Dann ist $P_1 \cup P_2$ ein Kreis K, der beide Knoten u, v enthält.

Trennende Knoten- und Kantenmengen

Trennende Knoten- und Kantenmengen

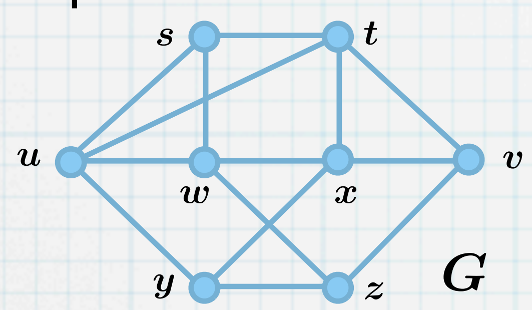
* **Definition 13**:
  Seien u und v zwei unterschiedliche Knoten eines Graphen $G = (V, E)$. Eine Knotenteilmenge $S \subseteq V \backslash \{u, v\}$ heißt u–v–**trennend**, wenn der knotengelöschte Untergraph $G - S$ nichtzusammenhängend ist und u und v in unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten liegen. Man sagt, S **trennt** u von v.

Trennende Knoten- und Kantenmengen

* **Definition 13**:
  Seien u und v zwei unterschiedliche Knoten eines Graphen $G = (V, E)$. Eine Knotenteilmenge $S \subseteq V \setminus \{u, v\}$ heißt u–v–**trennend**, wenn der knotengelöschte Untergraph $G - S$ nichtzusammenhängend ist und u und v in unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten liegen. Man sagt, S **trennt** u von v.
* Beispiel: Die Knotenmenge $S = \{t, w, y\}$ ist u–v–trennend.

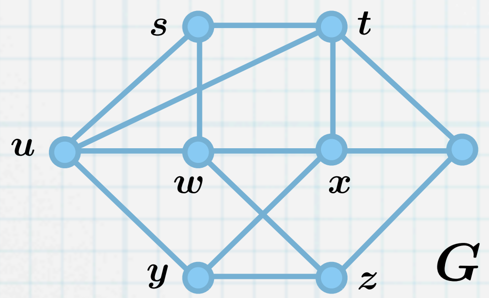
Trennende Knoten- und Kantenmengen

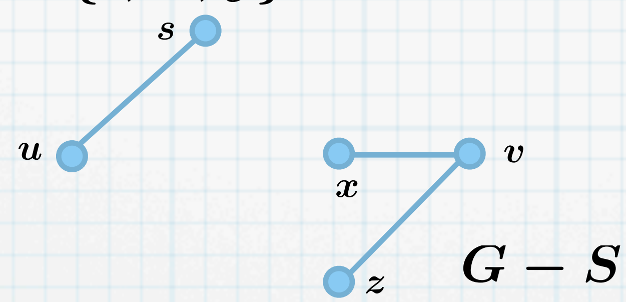
- **Definition 13**:
  Seien u und v zwei unterschiedliche Knoten eines Graphen $G = (V, E)$. Eine Knotenteilmenge $S \subseteq V \setminus \{u, v\}$ heißt u–v**–trennend**, wenn der knotengelöschte Untergraph $G - S$ nichtzusammenhängend ist und u und v in unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten liegen. Man sagt, S **trennt** u von v.
- Beispiel: Die Knotenmenge $S = \{t, w, y\}$ ist u–v–trennend.



Trennende Knoten- und Kantenmengen

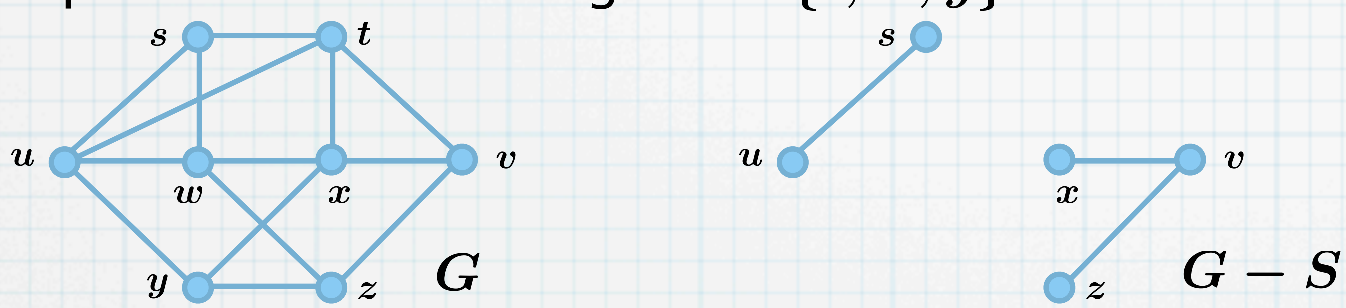
* **Definition 13**:
Seien u und v zwei unterschiedliche Knoten eines Graphen $G = (V, E)$. Eine Knotenteilmenge $S \subseteq V \backslash \{u, v\}$ heißt u–v–**trennend**, wenn der knotengelöschte Untergraph $G - S$ nichtzusammenhängend ist und u und v in unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten liegen. Man sagt, S **trennt** u von v.
* Beispiel: Die Knotenmenge $S = \{t, w, y\}$ ist u–v–trennend.





Trennende Knoten- und Kantenmengen

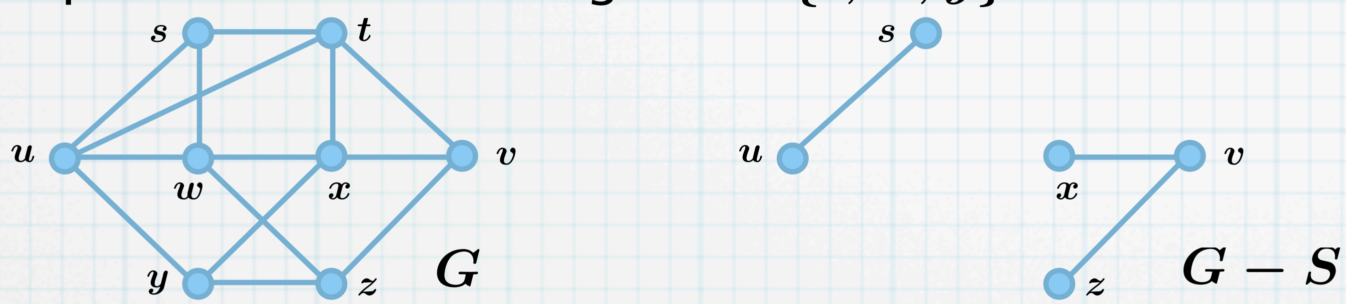
- **Definition 13**:
  Seien u und v zwei unterschiedliche Knoten eines Graphen $G = (V, E)$. Eine Knotenteilmenge $S \subseteq V \backslash \{u, v\}$ heißt u–v–**trennend**, wenn der knotengelöschte Untergraph $G - S$ nichtzusammenhängend ist und u und v in unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten liegen. Man sagt, S **trennt** u von v.
- Beispiel: Die Knotenmenge $S = \{t, w, y\}$ ist u–v–trennend.



- **Definition 14**:
  Für zwei verschiedene Knoten u, v heißt eine Kantenteilmenge $F \subseteq E$ des Graphen $G = (V, E)$ u–v–**trennend**, wenn $G - F$ nichtzusammenhängend ist und u und v in unterschiedlichen Komponenten liegen. Man sagt, F **trennt** u von v.

Trennende Knoten- und Kantenmengen

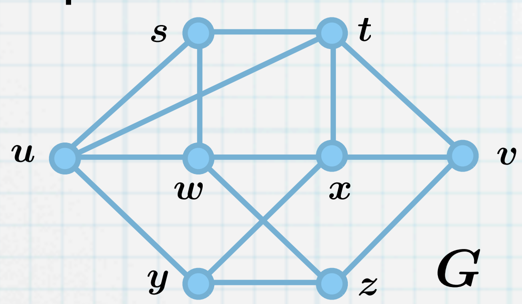
* **Definition 13**:
  Seien u und v zwei unterschiedliche Knoten eines Graphen $G = (V, E)$. Eine Knotenteilmenge $S \subseteq V \backslash \{u, v\}$ heißt u–v–**trennend**, wenn der knotengelöschte Untergraph $G - S$ nichtzusammenhängend ist und u und v in unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten liegen. Man sagt, S **trennt** u von v.
* Beispiel: Die Knotenmenge $S = \{t, w, y\}$ ist u–v–trennend.

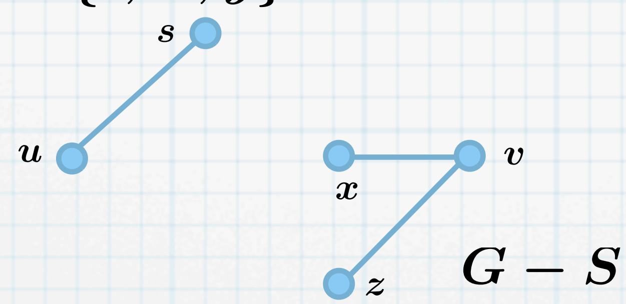


* **Definition 14**:
  Für zwei verschiedene Knoten u, v heißt eine Kantenteilmenge $F \subseteq E$ des Graphen $G = (V, E)$ u–v–**trennend**, wenn $G - F$ nichtzusammenhängend ist und u und v in unterschiedlichen Komponenten liegen. Man sagt, F **trennt** u von v.
* Beispiel: Die Kantenmenge $F = \{tv, tx, wx, wz, uy\}$ ist u–v–trennend.

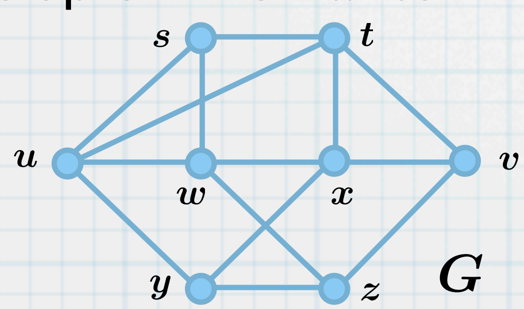
Trennende Knoten- und Kantenmengen

* **Definition 13**:
Seien u und v zwei unterschiedliche Knoten eines Graphen $G = (V, E)$. Eine Knotenteilmenge $S \subseteq V \setminus \{u, v\}$ heißt u–v–**trennend**, wenn der knotengelöschte Untergraph $G - S$ nichtzusammenhängend ist und u und v in unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten liegen. Man sagt, S **trennt** u von v.
* Beispiel: Die Knotenmenge $S = \{t, w, y\}$ ist u–v–trennend.



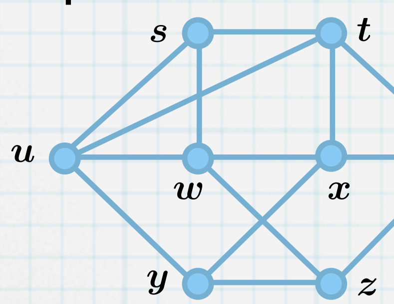


* **Definition 14**:
Für zwei verschiedene Knoten u, v heißt eine Kantenteilmenge $F \subseteq E$ des Graphen $G = (V, E)$ u–v–**trennend**, wenn $G - F$ nichtzusammenhängend ist und u und v in unterschiedlichen Komponenten liegen. Man sagt, F **trennt** u von v.
* Beispiel: Die Kantenmenge $F = \{tv, tx, wx, wz, uy\}$ ist u–v–trennend.

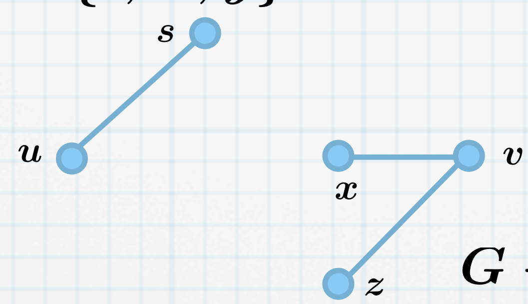


Trennende Knoten- und Kantenmengen

* **Definition 13**:
Seien u und v zwei unterschiedliche Knoten eines Graphen $G = (V, E)$. Eine Knotenteilmenge $S \subseteq V \backslash \{u, v\}$ heißt u–v–**trennend**, wenn der knotengelöschte Untergraph $G - S$ nichtzusammenhängend ist und u und v in unterschiedlichen Zusammenhangskomponenten liegen. Man sagt, S **trennt** u von v.
* Beispiel: Die Knotenmenge $S = \{t, w, y\}$ ist u–v–trennend.

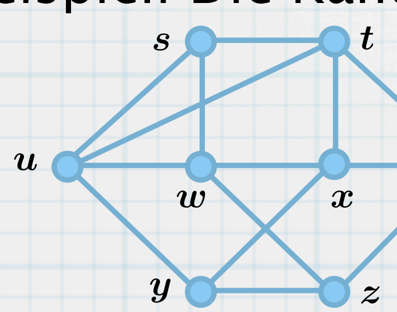


G

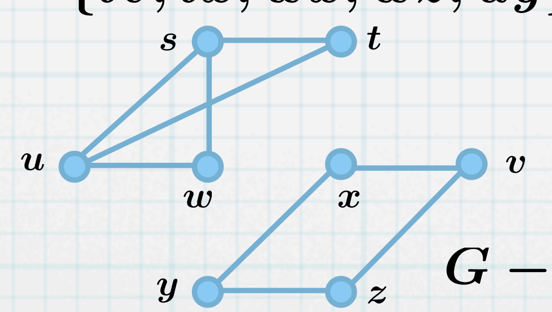


$G - S$

* **Definition 14**:
Für zwei verschiedene Knoten u, v heißt eine Kantenteilmenge $F \subseteq E$ des Graphen $G = (V, E)$ u–v–**trennend**, wenn $G - F$ nichtzusammenhängend ist und u und v in unterschiedlichen Komponenten liegen. Man sagt, F **trennt** u von v.
* Beispiel: Die Kantenmenge $F = \{tv, tx, wx, wz, uy\}$ ist u–v–trennend.



G



$G - F$

Charakterisierung trennender Mengen

Charakterisierung trennender Mengen

* **Satz 15**:
  Seien u und v zwei verschiedene Knoten des Graphen $G = (V, E)$.

Charakterisierung trennender Mengen

* **Satz 15**:
Seien u und v zwei verschiedene Knoten des Graphen $G = (V, E)$.

(a) Eine Knotenteilmenge $S \subseteq V \backslash \{u, v\}$ ist genau dann u–v–trennend, wenn jeder u–v–Weg mindestens einen inneren Knoten enthält, der S angehört.

Charakterisierung trennender Mengen

* **Satz 15**:
  Seien u und v zwei verschiedene Knoten des Graphen $G = (V, E)$.
  (a) Eine Knotenteilmenge $S \subseteq V \backslash \{u, v\}$ ist genau dann u–v–trennend, wenn jeder u–v–Weg mindestens einen inneren Knoten enthält, der S angehört.
  (b) Eine Kantenteilmenge F von E ist dann und nur dann u–v–trennend, wenn jeder u–v–Weg mindestens eine Kante enthält, die F angehört.

Charakterisierung trennender Mengen

* **Satz 15**:
  Seien u und v zwei verschiedene Knoten des Graphen $G = (V, E)$.
  (a) Eine Knotenteilmenge $S \subseteq V \setminus \{u, v\}$ ist genau dann u–v–trennend, wenn jeder u–v–Weg mindestens einen inneren Knoten enthält, der S angehört.
  (b) Eine Kantenteilmenge F von E ist dann und nur dann u–v–trennend, wenn jeder u–v–Weg mindestens eine Kante enthält, die F angehört.
* Beweis: Übung.

Der Satz von Menger (Knotenversion)

Der Satz von Menger (Knotenversion)

* **Satz 16** (Menger, 1927):
  Seien s und t zwei nichtadjazente Knoten eines Graphen G. Dann ist die maximale Anzahl paarweise disjunkter s–t–Wege m gleich der minimalen Anzahl von Knoten einer s–t–trennenden Menge n.

Der Satz von Menger (Knotenversion)

* **Satz 16** (Menger, 1927):
  Seien s und t zwei nichtadjazente Knoten eines Graphen G. Dann ist die maximale Anzahl paarweise disjunkter s–t–Wege m gleich der minimalen Anzahl von Knoten einer s–t–trennenden Menge n.

Der Satz von Menger (Knotenversion)

- **Satz 16** (Menger, 1927):
  Seien s und t zwei nichtadjazente Knoten eines Graphen G. Dann ist die maximale Anzahl paarweise disjunkter s–t–Wege m gleich der minimalen Anzahl von Knoten einer s–t–trennenden Menge n.
- Beweis (Dantzig, Fulkerson, 1956):

Der Satz von Menger (Knotenversion)

* **Satz 16** (Menger, 1927):
  Seien s und t zwei nichtadjazente Knoten eines Graphen G. Dann ist die maximale Anzahl paarweise disjunkter s–t–Wege m gleich der minimalen Anzahl von Knoten einer s–t–trennenden Menge n.
* Beweis (Dantzig, Fulkerson, 1956):
  Seien $P_1, \ldots, P_m$ paarweise innerlich disjunkte s–t–Wege.

Der Satz von Menger (Knotenversion)

* **Satz 16** (Menger, 1927):
  Seien s und t zwei nichtadjazente Knoten eines Graphen G. Dann ist die maximale Anzahl paarweise disjunkter s–t–Wege m gleich der minimalen Anzahl von Knoten einer s–t–trennenden Menge n.
* Beweis (Dantzig, Fulkerson, 1956):
  - Seien $P_1, \ldots, P_m$ paarweise innerlich disjunkte s–t–Wege.
  - Sei S eine s–t–trennende Knotenteilmenge.

Der Satz von Menger (Knotenversion)

* **Satz 16** (Menger, 1927):
  Seien s und t zwei nichtadjazente Knoten eines Graphen G. Dann ist die maximale Anzahl paarweise disjunkter s–t–Wege m gleich der minimalen Anzahl von Knoten einer s–t–trennenden Menge n.
* Beweis (Dantzig, Fulkerson, 1956):
  - Seien $P_1, \dots, P_m$ paarweise innerlich disjunkte s–t–Wege.
  - Sei S eine s–t–trennende Knotenteilmenge.
  - Nach Satz 15a) beinhaltet jeder der Wege $P_1, \dots, P_m$ (mind.) ein Element von S.

Der Satz von Menger (Knotenversion)

* **Satz 16** (Menger, 1927):
  Seien s und t zwei nichtadjazente Knoten eines Graphen G. Dann ist die maximale Anzahl paarweise disjunkter s–t–Wege m gleich der minimalen Anzahl von Knoten einer s–t–trennenden Menge n.
* Beweis (Dantzig, Fulkerson, 1956):
  - Seien $P_1, \ldots, P_m$ paarweise innerlich disjunkte s–t–Wege.
  - Sei S eine s–t–trennende Knotenteilmenge.
  - Nach Satz 15a) beinhaltet jeder der Wege $P_1, \ldots, P_m$ (mind.) ein Element von S.
  - Da die Wege paarweise innerlich disjunkt sind, kann kein Element von S in mehr als einem Weg als innerer Knoten vorkommen.

Der Satz von Menger (Knotenversion)

- **Satz 16** (Menger, 1927):
  Seien s und t zwei nichtadjazente Knoten eines Graphen G. Dann ist die maximale Anzahl paarweise disjunkter s–t–Wege m gleich der minimalen Anzahl von Knoten einer s–t–trennenden Menge n.
- Beweis (Dantzig, Fulkerson, 1956):
  - Seien $P_1, \ldots, P_m$ paarweise innerlich disjunkte s–t–Wege.
  - Sei S eine s–t–trennende Knotenteilmenge.
  - Nach Satz 15a) beinhaltet jeder der Wege $P_1, \ldots, P_m$ (mind.) ein Element von S.
  - Da die Wege paarweise innerlich disjunkt sind, kann kein Element von S in mehr als einem Weg als innerer Knoten vorkommen.
  - Also gibt es mindestens so viele Knoten in S wie es Wege gibt, d.h. $|S| \geq m$.

Der Satz von Menger (Knotenversion)

* **Satz 16** (Menger, 1927):
  Seien s und t zwei nichtadjazente Knoten eines Graphen G. Dann ist die maximale Anzahl paarweise disjunkter s–t–Wege m gleich der minimalen Anzahl von Knoten einer s–t–trennenden Menge n.
* Beweis (Dantzig, Fulkerson, 1956):
  - Seien $P_1, \ldots, P_m$ paarweise innerlich disjunkte s–t–Wege.
  - Sei S eine s–t–trennende Knotenteilmenge.
  - Nach Satz 15a) beinhaltet jeder der Wege $P_1, \ldots, P_m$ (mind.) ein Element von S.
  - Da die Wege paarweise innerlich disjunkt sind, kann kein Element von S in mehr als einem Weg als innerer Knoten vorkommen.
  - Also gibt es mindestens so viele Knoten in S wie es Wege gibt, d.h. $|S| \geq m$.
  - Da dieses für jede s–t–trennende Menge gilt, ist es insbesondere für diejenige mit minimaler Anzahl Knoten richtig.

Der Satz von Menger (Knotenversion)

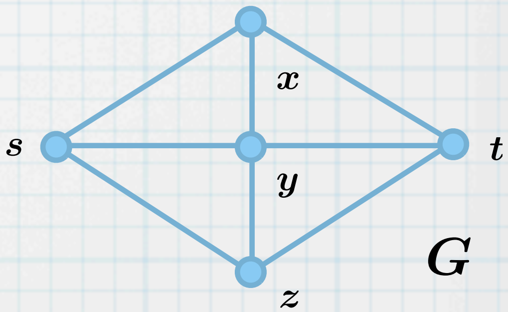
* **Satz 16** (Menger, 1927):
  Seien s und t zwei nichtadjazente Knoten eines Graphen G. Dann ist die maximale Anzahl paarweise disjunkter s–t–Wege m gleich der minimalen Anzahl von Knoten einer s–t–trennenden Menge n.
* Beweis (Dantzig, Fulkerson, 1956):
  - Seien $P_1, \ldots, P_m$ paarweise innerlich disjunkte s–t–Wege.
  - Sei S eine s–t–trennende Knotenteilmenge.
  - Nach Satz 15a) beinhaltet jeder der Wege $P_1, \ldots, P_m$ (mind.) ein Element von S.
  - Da die Wege paarweise innerlich disjunkt sind, kann kein Element von S in mehr als einem Weg als innerer Knoten vorkommen.
  - Also gibt es mindestens so viele Knoten in S wie es Wege gibt, d.h. $|S| \geq m$.
  - Da dieses für jede s–t–trennende Menge gilt, ist es insbesondere für diejenige mit minimaler Anzahl Knoten richtig.
  - Somit haben wir gezeigt: $m \leq n$. Bleibt zu zeigen: $m \geq n$.

Der Satz von Menger (Knotenversion)

* **Satz 16** (Menger, 1927):
  Seien s und t zwei nichtadjazente Knoten eines Graphen G. Dann ist die maximale Anzahl paarweise disjunkter s–t–Wege m gleich der minimalen Anzahl von Knoten einer s–t–trennenden Menge n.
* Beweis (Dantzig, Fulkerson, 1956):
  - Seien $P_1, \ldots, P_m$ paarweise innerlich disjunkte s–t–Wege.
  - Sei S eine s–t–trennende Knotenteilmenge.
  - Nach Satz 15a) beinhaltet jeder der Wege $P_1, \ldots, P_m$ (mind.) ein Element von S.
  - Da die Wege paarweise innerlich disjunkt sind, kann kein Element von S in mehr als einem Weg als innerer Knoten vorkommen.
  - Also gibt es mindestens so viele Knoten in S wie es Wege gibt, d.h. $|S| \geq m$.
  - Da dieses für jede s–t–trennende Menge gilt, ist es insbesondere für diejenige mit minimaler Anzahl Knoten richtig.
  - Somit haben wir gezeigt: $m \leq n$. Bleibt zu zeigen: $m \geq n$.
  - Konstruiere dazu ein Flussnetz (D, u, s, t) aus G. Beispiel:

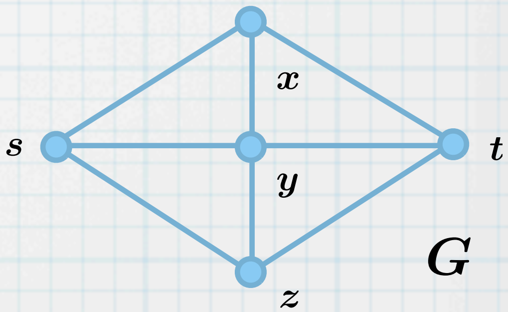
Der Satz von Menger (Knotenversion)

* **Satz 16** (Menger, 1927):
  Seien s und t zwei nichtadjazente Knoten eines Graphen G. Dann ist die maximale Anzahl paarweise disjunkter s–t–Wege m gleich der minimalen Anzahl von Knoten einer s–t–trennenden Menge n.
* Beweis (Dantzig, Fulkerson, 1956):
  - Seien $P_1, \ldots, P_m$ paarweise innerlich disjunkte s–t–Wege.
  - Sei S eine s–t–trennende Knotenteilmenge.
  - Nach Satz 15a) beinhaltet jeder der Wege $P_1, \ldots, P_m$ (mind.) ein Element von S.
  - Da die Wege paarweise innerlich disjunkt sind, kann kein Element von S in mehr als einem Weg als innerer Knoten vorkommen.
  - Also gibt es mindestens so viele Knoten in S wie es Wege gibt, d.h. $|S| \geq m$.
  - Da dieses für jede s–t–trennende Menge gilt, ist es insbesondere für diejenige mit minimaler Anzahl Knoten richtig.
  - Somit haben wir gezeigt: $m \leq n$. Bleibt zu zeigen: $m \geq n$.
  - Konstruiere dazu ein Flussnetz (D, u, s, t) aus G. Beispiel:



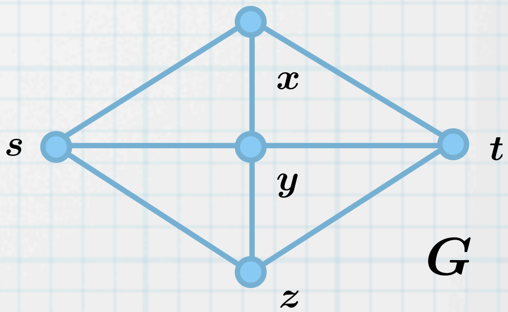
Der Satz von Menger (Knotenversion)

* **Satz 16** (Menger, 1927):
  Seien s und t zwei nichtadjazente Knoten eines Graphen G. Dann ist die maximale Anzahl paarweise disjunkter s–t–Wege m gleich der minimalen Anzahl von Knoten einer s–t–trennenden Menge n.
* Beweis (Dantzig, Fulkerson, 1956):
  - Seien $P_1, \ldots, P_m$ paarweise innerlich disjunkte s–t–Wege.
  - Sei S eine s–t–trennende Knotenteilmenge.
  - Nach Satz 15a) beinhaltet jeder der Wege $P_1, \ldots, P_m$ (mind.) ein Element von S.
  - Da die Wege paarweise innerlich disjunkt sind, kann kein Element von S in mehr als einem Weg als innerer Knoten vorkommen.
  - Also gibt es mindestens so viele Knoten in S wie es Wege gibt, d.h. $|S| \geq m$.
  - Da dieses für jede s–t–trennende Menge gilt, ist es insbesondere für diejenige mit minimaler Anzahl Knoten richtig.
  - Somit haben wir gezeigt: $m \leq n$. Bleibt zu zeigen: $m \geq n$.
  - Konstruiere dazu ein Flussnetz (D, u, s, t) aus G. Beispiel:
    - $V(D)$ besteht aus



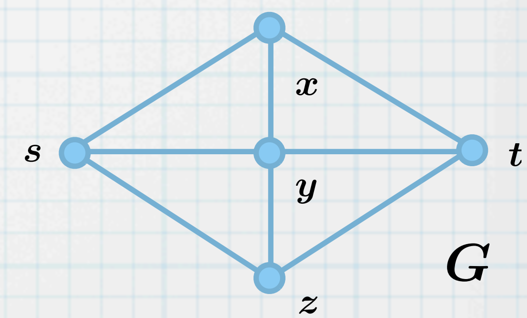
Der Satz von Menger (Knotenversion)

* **Satz 16** (Menger, 1927):
  Seien s und t zwei nichtadjazente Knoten eines Graphen G. Dann ist die maximale Anzahl paarweise disjunkter s–t–Wege m gleich der minimalen Anzahl von Knoten einer s–t–trennenden Menge n.
* Beweis (Dantzig, Fulkerson, 1956):
  - Seien $P_1, \ldots, P_m$ paarweise innerlich disjunkte s–t–Wege.
  - Sei S eine s–t–trennende Knotenteilmenge.
  - Nach Satz 15a) beinhaltet jeder der Wege $P_1, \ldots, P_m$ (mind.) ein Element von S.
  - Da die Wege paarweise innerlich disjunkt sind, kann kein Element von S in mehr als einem Weg als innerer Knoten vorkommen.
  - Also gibt es mindestens so viele Knoten in S wie es Wege gibt, d.h. $|S| \geq m$.
  - Da dieses für jede s–t–trennende Menge gilt, ist es insbesondere für diejenige mit minimaler Anzahl Knoten richtig.
  - Somit haben wir gezeigt: $m \leq n$. Bleibt zu zeigen: $m \geq n$.
  - Konstruiere dazu ein Flussnetz (D, u, s, t) aus G. Beispiel:
    - $V(D)$ besteht aus
      - s und t und



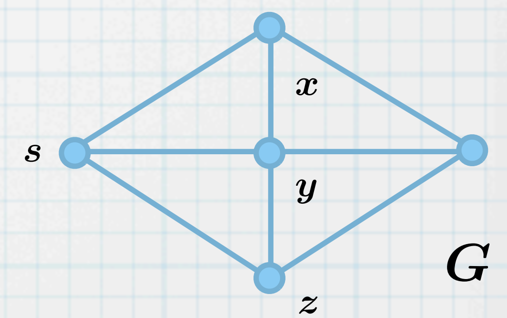
Der Satz von Menger (Knotenversion)

* **Satz 16** (Menger, 1927):
  Seien s und t zwei nichtadjazente Knoten eines Graphen G. Dann ist die maximale Anzahl paarweise disjunkter s–t–Wege m gleich der minimalen Anzahl von Knoten einer s–t–trennenden Menge n.
* Beweis (Dantzig, Fulkerson, 1956):
  - Seien $P_1, \ldots, P_m$ paarweise innerlich disjunkte s–t–Wege.
  - Sei S eine s–t–trennende Knotenteilmenge.
  - Nach Satz 15a) beinhaltet jeder der Wege $P_1, \ldots, P_m$ (mind.) ein Element von S.
  - Da die Wege paarweise innerlich disjunkt sind, kann kein Element von S in mehr als einem Weg als innerer Knoten vorkommen.
  - Also gibt es mindestens so viele Knoten in S wie es Wege gibt, d.h. $|S| \geq m$.
  - Da dieses für jede s–t–trennende Menge gilt, ist es insbesondere für diejenige mit minimaler Anzahl Knoten richtig.
  - Somit haben wir gezeigt: $m \leq n$. Bleibt zu zeigen: $m \geq n$.
  - Konstruiere dazu ein Flussnetz (D, u, s, t) aus G. Beispiel:
    - $V(D)$ besteht aus
      - s und t und



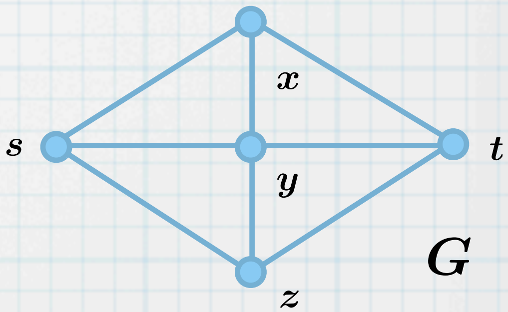
Der Satz von Menger (Knotenversion)

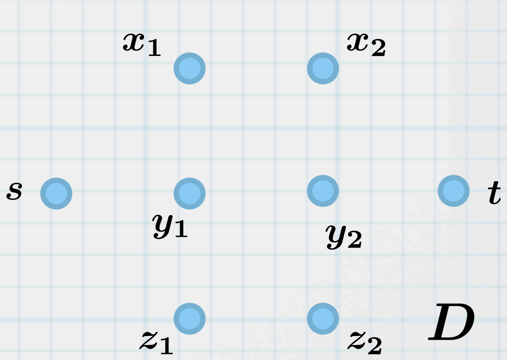
- **Satz 16** (Menger, 1927):
  Seien s und t zwei nichtadjazente Knoten eines Graphen G. Dann ist die maximale Anzahl paarweise disjunkter s–t–Wege m gleich der minimalen Anzahl von Knoten einer s–t–trennenden Menge n.
- Beweis (Dantzig, Fulkerson, 1956):
  - Seien $P_1, \ldots, P_m$ paarweise innerlich disjunkte s–t–Wege.
  - Sei S eine s–t–trennende Knotenteilmenge.
  - Nach Satz 15a) beinhaltet jeder der Wege $P_1, \ldots, P_m$ (mind.) ein Element von S.
  - Da die Wege paarweise innerlich disjunkt sind, kann kein Element von S in mehr als einem Weg als innerer Knoten vorkommen.
  - Also gibt es mindestens so viele Knoten in S wie es Wege gibt, d.h. $|S| \geq m$.
  - Da dieses für jede s–t–trennende Menge gilt, ist es insbesondere für diejenige mit minimaler Anzahl Knoten richtig.
  - Somit haben wir gezeigt: $m \leq n$. Bleibt zu zeigen: $m \geq n$.
  - Konstruiere dazu ein Flussnetz (D, u, s, t) aus G. Beispiel:
    - $V(D)$ besteht aus
      - s und t und
      - x_1, x_2 für alle Knoten $x \in V(G) \backslash \{s, t\}$.



Der Satz von Menger (Knotenversion)

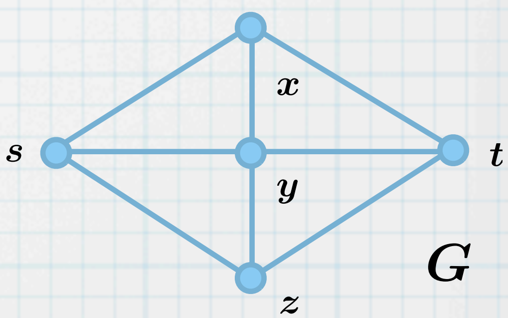
* **Satz 16** (Menger, 1927):
  Seien s und t zwei nichtadjazente Knoten eines Graphen G. Dann ist die maximale Anzahl paarweise disjunkter s–t–Wege m gleich der minimalen Anzahl von Knoten einer s–t–trennenden Menge n.
* Beweis (Dantzig, Fulkerson, 1956):
  - Seien $P_1, \ldots, P_m$ paarweise innerlich disjunkte s–t–Wege.
  - Sei S eine s–t–trennende Knotenteilmenge.
  - Nach Satz 15a) beinhaltet jeder der Wege $P_1, \ldots, P_m$ (mind.) ein Element von S.
  - Da die Wege paarweise innerlich disjunkt sind, kann kein Element von S in mehr als einem Weg als innerer Knoten vorkommen.
  - Also gibt es mindestens so viele Knoten in S wie es Wege gibt, d.h. $|S| \geq m$.
  - Da dieses für jede s–t–trennende Menge gilt, ist es insbesondere für diejenige mit minimaler Anzahl Knoten richtig.
  - Somit haben wir gezeigt: $m \leq n$. Bleibt zu zeigen: $m \geq n$.
  - Konstruiere dazu ein Flussnetz (D, u, s, t) aus G. Beispiel:
    - $V(D)$ besteht aus
      - s und t und
      - x_1, x_2 für alle Knoten $x \in V(G) \backslash \{s, t\}$.

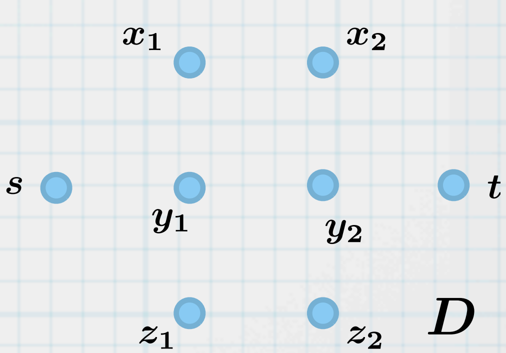




Der Satz von Menger (Knotenversion)

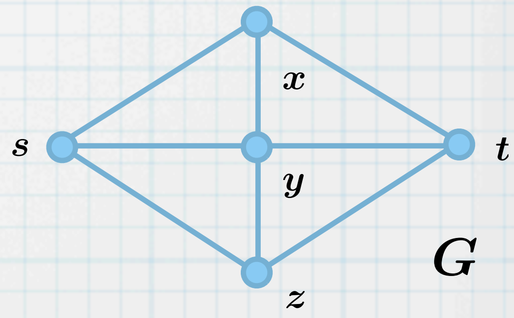
* **Satz 16** (Menger, 1927):
  Seien s und t zwei nichtadjazente Knoten eines Graphen G. Dann ist die maximale Anzahl paarweise disjunkter s–t–Wege m gleich der minimalen Anzahl von Knoten einer s–t–trennenden Menge n.
* Beweis (Dantzig, Fulkerson, 1956):
  - Seien $P_1, \ldots, P_m$ paarweise innerlich disjunkte s–t–Wege.
  - Sei S eine s–t–trennende Knotenteilmenge.
  - Nach Satz 15a) beinhaltet jeder der Wege $P_1, \ldots, P_m$ (mind.) ein Element von S.
  - Da die Wege paarweise innerlich disjunkt sind, kann kein Element von S in mehr als einem Weg als innerer Knoten vorkommen.
  - Also gibt es mindestens so viele Knoten in S wie es Wege gibt, d.h. $|S| \geq m$.
  - Da dieses für jede s–t–trennende Menge gilt, ist es insbesondere für diejenige mit minimaler Anzahl Knoten richtig.
  - Somit haben wir gezeigt: $m \leq n$. Bleibt zu zeigen: $m \geq n$.
  - Konstruiere dazu ein Flussnetz (D, u, s, t) aus G. Beispiel:
    - $V(D)$ besteht aus
      - s und t und
      - x_1, x_2 für alle Knoten $x \in V(G) \setminus \{s, t\}$.
    - $A(D)$ besteht aus

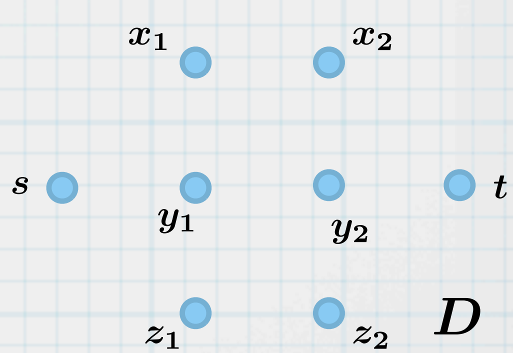




Der Satz von Menger (Knotenversion)

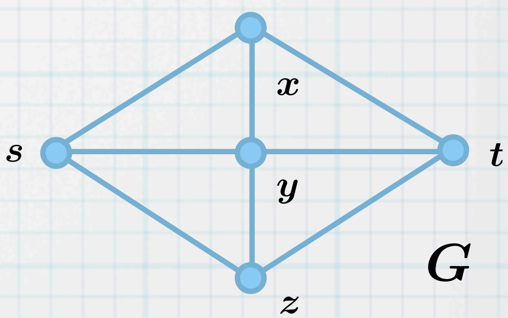
* **Satz 16** (Menger, 1927):
  Seien s und t zwei nichtadjazente Knoten eines Graphen G. Dann ist die maximale Anzahl paarweise disjunkter s–t–Wege m gleich der minimalen Anzahl von Knoten einer s–t–trennenden Menge n.
* Beweis (Dantzig, Fulkerson, 1956):
  - Seien $P_1, \ldots, P_m$ paarweise innerlich disjunkte s–t–Wege.
  - Sei S eine s–t–trennende Knotenteilmenge.
  - Nach Satz 15a) beinhaltet jeder der Wege $P_1, \ldots, P_m$ (mind.) ein Element von S.
  - Da die Wege paarweise innerlich disjunkt sind, kann kein Element von S in mehr als einem Weg als innerer Knoten vorkommen.
  - Also gibt es mindestens so viele Knoten in S wie es Wege gibt, d.h. $|S| \geq m$.
  - Da dieses für jede s–t–trennende Menge gilt, ist es insbesondere für diejenige mit minimaler Anzahl Knoten richtig.
  - Somit haben wir gezeigt: $m \leq n$. Bleibt zu zeigen: $m \geq n$.
  - Konstruiere dazu ein Flussnetz (D, u, s, t) aus G. Beispiel:
    - $V(D)$ besteht aus
      - s und t und
      - x_1, x_2 für alle Knoten $x \in V(G) \backslash \{s, t\}$.
    - $A(D)$ besteht aus
      - inneren Bögen (x_1, x_2) mit $u_{x_1, x_2} = 1$ für alle $x \in V(G) \backslash \{s, t\}$,

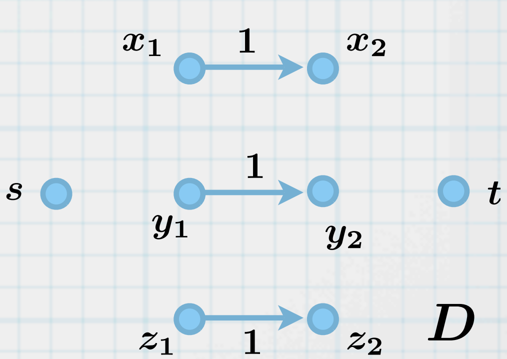




Der Satz von Menger (Knotenversion)

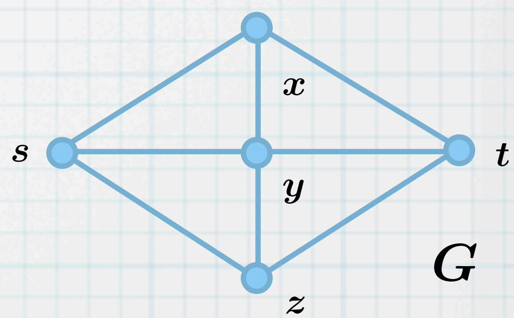
* **Satz 16** (Menger, 1927):
  Seien s und t zwei nichtadjazente Knoten eines Graphen G. Dann ist die maximale Anzahl paarweise disjunkter s–t–Wege m gleich der minimalen Anzahl von Knoten einer s–t–trennenden Menge n.
* Beweis (Dantzig, Fulkerson, 1956):
  - Seien $P_1, \ldots, P_m$ paarweise innerlich disjunkte s–t–Wege.
  - Sei S eine s–t–trennende Knotenteilmenge.
  - Nach Satz 15a) beinhaltet jeder der Wege $P_1, \ldots, P_m$ (mind.) ein Element von S.
  - Da die Wege paarweise innerlich disjunkt sind, kann kein Element von S in mehr als einem Weg als innerer Knoten vorkommen.
  - Also gibt es mindestens so viele Knoten in S wie es Wege gibt, d.h. $|S| \geq m$.
  - Da dieses für jede s–t–trennende Menge gilt, ist es insbesondere für diejenige mit minimaler Anzahl Knoten richtig.
  - Somit haben wir gezeigt: $m \leq n$. Bleibt zu zeigen: $m \geq n$.
  - Konstruiere dazu ein Flussnetz (D, u, s, t) aus G. Beispiel:
    - $V(D)$ besteht aus
      - s und t und
      - x_1, x_2 für alle Knoten $x \in V(G) \backslash \{s, t\}$.
    - $A(D)$ besteht aus
      - inneren Bögen (x_1, x_2) mit $u_{x_1, x_2} = 1$ für alle $x \in V(G) \backslash \{s, t\}$,

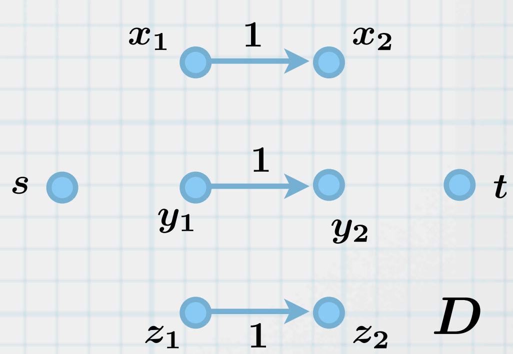




Der Satz von Menger (Knotenversion)

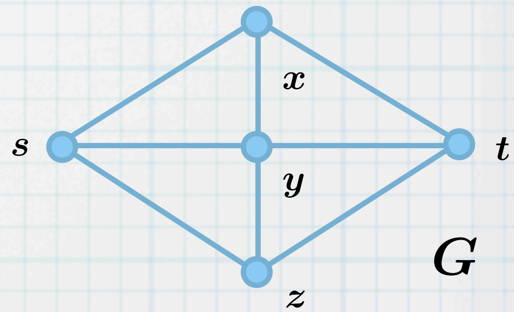
* **Satz 16** (Menger, 1927):
  Seien s und t zwei nichtadjazente Knoten eines Graphen G. Dann ist die maximale Anzahl paarweise disjunkter s–t–Wege m gleich der minimalen Anzahl von Knoten einer s–t–trennenden Menge n.
* Beweis (Dantzig, Fulkerson, 1956):
  - Seien $P_1, \ldots, P_m$ paarweise innerlich disjunkte s–t–Wege.
  - Sei S eine s–t–trennende Knotenteilmenge.
  - Nach Satz 15a) beinhaltet jeder der Wege $P_1, \ldots, P_m$ (mind.) ein Element von S.
  - Da die Wege paarweise innerlich disjunkt sind, kann kein Element von S in mehr als einem Weg als innerer Knoten vorkommen.
  - Also gibt es mindestens so viele Knoten in S wie es Wege gibt, d.h. $|S| \geq m$.
  - Da dieses für jede s–t–trennende Menge gilt, ist es insbesondere für diejenige mit minimaler Anzahl Knoten richtig.
  - Somit haben wir gezeigt: $m \leq n$. Bleibt zu zeigen: $m \geq n$.
  - Konstruiere dazu ein Flussnetz (D, u, s, t) aus G. Beispiel:
    - $V(D)$ besteht aus
      - s und t und
      - x_1, x_2 für alle Knoten $x \in V(G) \backslash \{s, t\}$.
    - $A(D)$ besteht aus
      - inneren Bögen (x_1, x_2) mit $u_{x_1,x_2} = 1$ für alle $x \in V(G) \backslash \{s, t\}$,
      - Bogen (s, x_1) mit $u_{s,x_1} = \infty$ für alle $x \in V(G) \backslash \{s, t\}$,

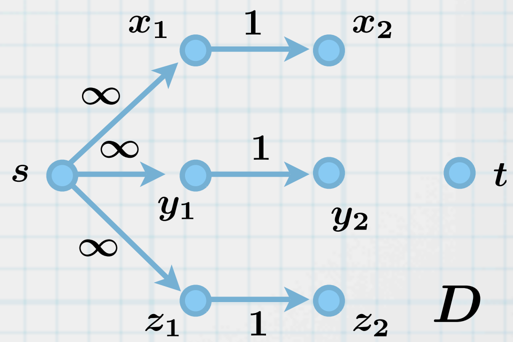




Der Satz von Menger (Knotenversion)

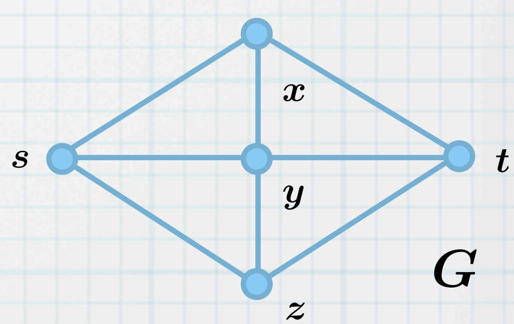
* **Satz 16** (Menger, 1927):
  Seien s und t zwei nichtadjazente Knoten eines Graphen G. Dann ist die maximale Anzahl paarweise disjunkter s–t–Wege m gleich der minimalen Anzahl von Knoten einer s–t–trennenden Menge n.
* Beweis (Dantzig, Fulkerson, 1956):
  - Seien $P_1, \ldots, P_m$ paarweise innerlich disjunkte s–t–Wege.
  - Sei S eine s–t–trennende Knotenteilmenge.
  - Nach Satz 15a) beinhaltet jeder der Wege $P_1, \ldots, P_m$ (mind.) ein Element von S.
  - Da die Wege paarweise innerlich disjunkt sind, kann kein Element von S in mehr als einem Weg als innerer Knoten vorkommen.
  - Also gibt es mindestens so viele Knoten in S wie es Wege gibt, d.h. $|S| \geq m$.
  - Da dieses für jede s–t–trennende Menge gilt, ist es insbesondere für diejenige mit minimaler Anzahl Knoten richtig.
  - Somit haben wir gezeigt: $m \leq n$. Bleibt zu zeigen: $m \geq n$.
  - Konstruiere dazu ein Flussnetz (D, u, s, t) aus G. Beispiel:
    - $V(D)$ besteht aus
      - s und t und
      - x_1, x_2 für alle Knoten $x \in V(G) \backslash \{s, t\}$.
    - $A(D)$ besteht aus
      - inneren Bögen (x_1, x_2) mit $u_{x_1,x_2} = 1$ für alle $x \in V(G) \backslash \{s, t\}$,
      - Bogen (s, x_1) mit $u_{s,x_1} = \infty$ für alle $x \in V(G) \backslash \{s, t\}$,

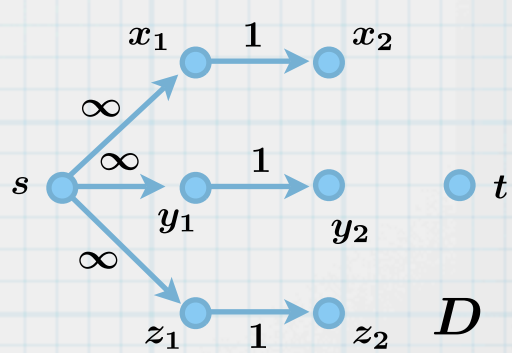




Der Satz von Menger (Knotenversion)

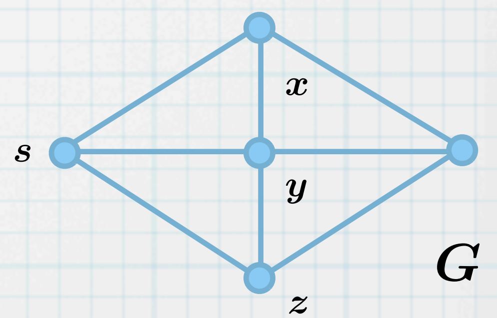
- **Satz 16** (Menger, 1927):
  Seien s und t zwei nichtadjazente Knoten eines Graphen G. Dann ist die maximale Anzahl paarweise disjunkter s–t–Wege m gleich der minimalen Anzahl von Knoten einer s–t–trennenden Menge n.
- Beweis (Dantzig, Fulkerson, 1956):
  - Seien $P_1, \ldots, P_m$ paarweise innerlich disjunkte s–t–Wege.
  - Sei S eine s–t–trennende Knotenteilmenge.
  - Nach Satz 15a) beinhaltet jeder der Wege $P_1, \ldots, P_m$ (mind.) ein Element von S.
  - Da die Wege paarweise innerlich disjunkt sind, kann kein Element von S in mehr als einem Weg als innerer Knoten vorkommen.
  - Also gibt es mindestens so viele Knoten in S wie es Wege gibt, d.h. $|S| \geq m$.
  - Da dieses für jede s–t–trennende Menge gilt, ist es insbesondere für diejenige mit minimaler Anzahl Knoten richtig.
  - Somit haben wir gezeigt: $m \leq n$. Bleibt zu zeigen: $m \geq n$.
  - Konstruiere dazu ein Flussnetz (D, u, s, t) aus G. Beispiel:
    - $V(D)$ besteht aus
      - s und t und
      - x_1, x_2 für alle Knoten $x \in V(G) \backslash \{s, t\}$.
    - $A(D)$ besteht aus
      - inneren Bögen (x_1, x_2) mit $u_{x_1,x_2} = 1$ für alle $x \in V(G) \backslash \{s, t\}$,
      - Bogen (s, x_1) mit $u_{s,x_1} = \infty$ für alle $x \in V(G) \backslash \{s, t\}$,
      - Bogen (x_2, t) mit $u_{x_2,t} = \infty$ für alle $x \in V(G) \backslash \{s, t\}$ und

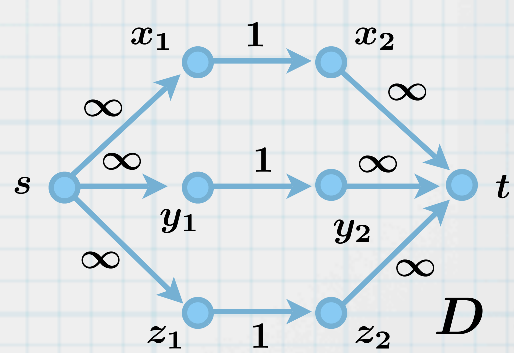




Der Satz von Menger (Knotenversion)

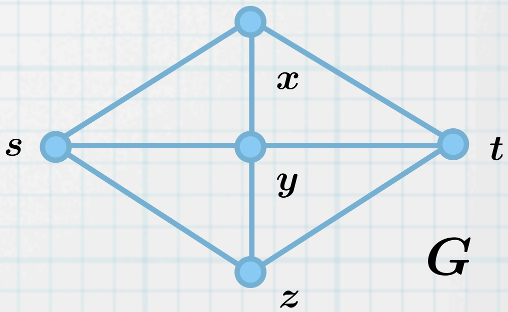
* **Satz 16** (Menger, 1927):
  Seien s und t zwei nichtadjazente Knoten eines Graphen G. Dann ist die maximale Anzahl paarweise disjunkter s–t–Wege m gleich der minimalen Anzahl von Knoten einer s–t–trennenden Menge n.
* Beweis (Dantzig, Fulkerson, 1956):
  - Seien $P_1, \ldots, P_m$ paarweise innerlich disjunkte s–t–Wege.
  - Sei S eine s–t–trennende Knotenteilmenge.
  - Nach Satz 15a) beinhaltet jeder der Wege $P_1, \ldots, P_m$ (mind.) ein Element von S.
  - Da die Wege paarweise innerlich disjunkt sind, kann kein Element von S in mehr als einem Weg als innerer Knoten vorkommen.
  - Also gibt es mindestens so viele Knoten in S wie es Wege gibt, d.h. $|S| \geq m$.
  - Da dieses für jede s–t–trennende Menge gilt, ist es insbesondere für diejenige mit minimaler Anzahl Knoten richtig.
  - Somit haben wir gezeigt: $m \leq n$. Bleibt zu zeigen: $m \geq n$.
  - Konstruiere dazu ein Flussnetz (D, u, s, t) aus G. Beispiel:
    - $V(D)$ besteht aus
      - s und t und
      - x_1, x_2 für alle Knoten $x \in V(G) \backslash \{s, t\}$.
    - $A(D)$ besteht aus
      - inneren Bögen (x_1, x_2) mit $u_{x_1,x_2} = 1$ für alle $x \in V(G) \backslash \{s, t\}$,
      - Bogen (s, x_1) mit $u_{s,x_1} = \infty$ für alle $x \in V(G) \backslash \{s, t\}$,
      - Bogen (x_2, t) mit $u_{x_2,t} = \infty$ für alle $x \in V(G) \backslash \{s, t\}$ und

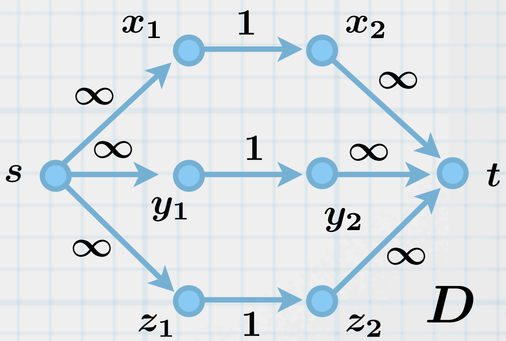




Der Satz von Menger (Knotenversion)

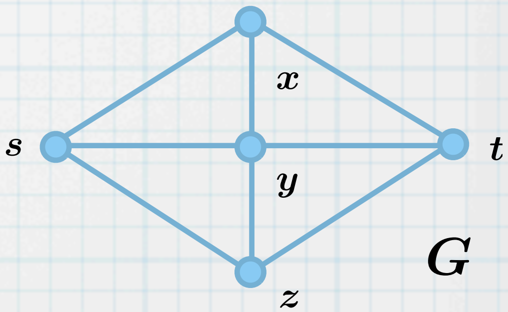
* **Satz 16** (Menger, 1927):
  Seien s und t zwei nichtadjazente Knoten eines Graphen G. Dann ist die maximale Anzahl paarweise disjunkter s–t–Wege m gleich der minimalen Anzahl von Knoten einer s–t–trennenden Menge n.
* Beweis (Dantzig, Fulkerson, 1956):
  - Seien $P_1, \ldots, P_m$ paarweise innerlich disjunkte s–t–Wege.
  - Sei S eine s–t–trennende Knotenteilmenge.
  - Nach Satz 15a) beinhaltet jeder der Wege $P_1, \ldots, P_m$ (mind.) ein Element von S.
  - Da die Wege paarweise innerlich disjunkt sind, kann kein Element von S in mehr als einem Weg als innerer Knoten vorkommen.
  - Also gibt es mindestens so viele Knoten in S wie es Wege gibt, d.h. $|S| \geq m$.
  - Da dieses für jede s–t–trennende Menge gilt, ist es insbesondere für diejenige mit minimaler Anzahl Knoten richtig.
  - Somit haben wir gezeigt: $m \leq n$. Bleibt zu zeigen: $m \geq n$.
  - Konstruiere dazu ein Flussnetz (D, u, s, t) aus G. Beispiel:
    - $V(D)$ besteht aus
      - s und t und
      - x_1, x_2 für alle Knoten $x \in V(G) \backslash \{s, t\}$.
    - $A(D)$ besteht aus
      - inneren Bögen (x_1, x_2) mit $u_{x_1,x_2} = 1$ für alle $x \in V(G) \backslash \{s, t\}$,
      - Bogen (s, x_1) mit $u_{s,x_1} = \infty$ für alle $x \in V(G) \backslash \{s, t\}$,
      - Bogen (x_2, t) mit $u_{x_2,t} = \infty$ für alle $x \in V(G) \backslash \{s, t\}$ und
      - Bögen $(x_2, y_1), (y_2, x_1)$ mit $u_{x_2,y_1} = u_{y_2,x_1} = \infty$ für alle $\{x, y\} \in E(G), x, y \notin \{s, t\}$.

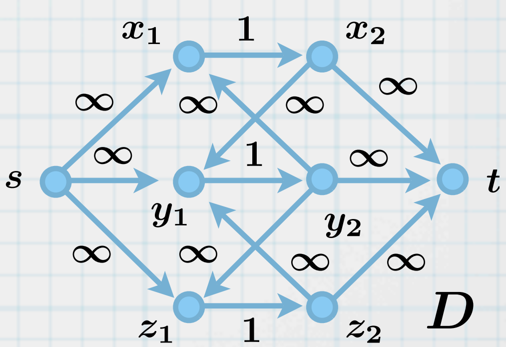




Der Satz von Menger (Knotenversion)

* **Satz 16** (Menger, 1927):
  Seien s und t zwei nichtadjazente Knoten eines Graphen G. Dann ist die maximale Anzahl paarweise disjunkter s–t–Wege m gleich der minimalen Anzahl von Knoten einer s–t–trennenden Menge n.
* Beweis (Dantzig, Fulkerson, 1956):
  - Seien $P_1, \ldots, P_m$ paarweise innerlich disjunkte s–t–Wege.
  - Sei S eine s–t–trennende Knotenteilmenge.
  - Nach Satz 15a) beinhaltet jeder der Wege $P_1, \ldots, P_m$ (mind.) ein Element von S.
  - Da die Wege paarweise innerlich disjunkt sind, kann kein Element von S in mehr als einem Weg als innerer Knoten vorkommen.
  - Also gibt es mindestens so viele Knoten in S wie es Wege gibt, d.h. $|S| \geq m$.
  - Da dieses für jede s–t–trennende Menge gilt, ist es insbesondere für diejenige mit minimaler Anzahl Knoten richtig.
  - Somit haben wir gezeigt: $m \leq n$. Bleibt zu zeigen: $m \geq n$.
  - Konstruiere dazu ein Flussnetz (D, u, s, t) aus G. Beispiel:
    - $V(D)$ besteht aus
      - s und t und
      - x_1, x_2 für alle Knoten $x \in V(G) \backslash \{s, t\}$.
    - $A(D)$ besteht aus
      - inneren Bögen (x_1, x_2) mit $u_{x_1,x_2} = 1$ für alle $x \in V(G) \backslash \{s, t\}$,
      - Bogen (s, x_1) mit $u_{s,x_1} = \infty$ für alle $x \in V(G) \backslash \{s, t\}$,
      - Bogen (x_2, t) mit $u_{x_2,t} = \infty$ für alle $x \in V(G) \backslash \{s, t\}$ und
      - Bögen $(x_2, y_1), (y_2, x_1)$ mit $u_{x_2,y_1} = u_{y_2,x_1} = \infty$ für alle $\{x, y\} \in E(G), x, y \notin \{s, t\}$.





Satz von Menger (Forts.)

Satz von Menger (Forts.)

* Beweis (Forts.):

Satz von Menger (Forts.)

* Beweis (Forts.):
    Sei d der Wert eines maximalen Flusses f in (D, u, s, t).

Satz von Menger (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  Sei d der Wert eines maximalen Flusses f in (D, u, s, t).
  Wir zeigen zunächst, dass $d = m$.

Satz von Menger (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  Sei d der Wert eines maximalen Flusses f in (D, u, s, t).
  Wir zeigen zunächst, dass $d = m$.
  Jeder Knoten x_1 (für $x \in V(G) \backslash \{s, t\}$) ist Anfangsknoten genau eines Bogens. Dieses ist der innere Bogen (x_1, x_2) mit Kapazität 1.

Satz von Menger (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  Sei d der Wert eines maximalen Flusses f in (D, u, s, t).
  Wir zeigen zunächst, dass $d = m$.
    Jeder Knoten x_1 (für $x \in V(G) \setminus \{s, t\}$) ist Anfangsknoten genau eines Bogens. Dieses ist der innere Bogen (x_1, x_2) mit Kapazität 1.
    Jeder Knoten x_2 (für $x \in V(G) \setminus \{s, t\}$) ist Endknoten genau eines Bogens. Auch dieses ist der innere Bogen (x_1, x_2) mit Kapazität 1.

Satz von Menger (Forts.)

* Beweis (Forts.):

  Sei d der Wert eines maximalen Flusses f in (D, u, s, t).

  Wir zeigen zunächst, dass $d = m$.

  Jeder Knoten x_1 (für $x \in V(G) \backslash \{s, t\}$) ist Anfangsknoten genau eines Bogens. Dieses ist der innere Bogen (x_1, x_2) mit Kapazität 1.

  Jeder Knoten x_2 (für $x \in V(G) \backslash \{s, t\}$) ist Endknoten genau eines Bogens. Auch dieses ist der innere Bogen (x_1, x_2) mit Kapazität 1.

  Jeder s–t–Weg muss über (mindestens einen) Bogen (x_1, x_2).

Satz von Menger (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  Sei d der Wert eines maximalen Flusses f in (D, u, s, t).
  Wir zeigen zunächst, dass $d = m$.
    Jeder Knoten x_1 (für $x \in V(G) \backslash \{s, t\}$) ist Anfangsknoten genau eines Bogens. Dieses ist der innere Bogen (x_1, x_2) mit Kapazität 1.
    Jeder Knoten x_2 (für $x \in V(G) \backslash \{s, t\}$) ist Endknoten genau eines Bogens. Auch dieses ist der innere Bogen (x_1, x_2) mit Kapazität 1.
    Jeder s–t–Weg muss über (mindestens einen) Bogen (x_1, x_2).
    Ein maximaler Fluss mit Wert d in (D, u, s, t) kann daher nur aus d paarweise innerlich disjunkten s–t–Wegen in D bestehen, von denen jeder den Wert 1 zum Flusswert beiträgt.

Satz von Menger (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  Sei d der Wert eines maximalen Flusses f in (D, u, s, t).
  Wir zeigen zunächst, dass $d = m$.
  Jeder Knoten x_1 (für $x \in V(G) \setminus \{s, t\}$) ist Anfangsknoten genau eines Bogens. Dieses ist der innere Bogen (x_1, x_2) mit Kapazität 1.
  Jeder Knoten x_2 (für $x \in V(G) \setminus \{s, t\}$) ist Endknoten genau eines Bogens. Auch dieses ist der innere Bogen (x_1, x_2) mit Kapazität 1.
  Jeder s–t–Weg muss über (mindestens einen) Bogen (x_1, x_2).
  Ein maximaler Fluss mit Wert d in (D, u, s, t) kann daher nur aus d paarweise innerlich disjunkten s–t–Wegen in D bestehen, von denen jeder den Wert 1 zum Flusswert beiträgt.
  Ein s–t–Weg $P = (s, x, y, \ldots, t)$ in G entspricht genau einem s–t–Weg $Q = (s, x_1, x_2, y_1, y_2, \ldots, t)$ in D und umgekehrt.

Satz von Menger (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  Sei d der Wert eines maximalen Flusses f in (D, u, s, t).
  Wir zeigen zunächst, dass $d = m$.
    Jeder Knoten x_1 (für $x \in V(G) \setminus \{s, t\}$) ist Anfangsknoten genau eines Bogens. Dieses ist der innere Bogen (x_1, x_2) mit Kapazität 1.
    Jeder Knoten x_2 (für $x \in V(G) \setminus \{s, t\}$) ist Endknoten genau eines Bogens. Auch dieses ist der innere Bogen (x_1, x_2) mit Kapazität 1.
    Jeder s–t–Weg muss über (mindestens einen) Bogen (x_1, x_2).
    Ein maximaler Fluss mit Wert d in (D, u, s, t) kann daher nur aus d paarweise innerlich disjunkten s–t–Wegen in D bestehen, von denen jeder den Wert 1 zum Flusswert beiträgt.
    Ein s–t–Weg $P = (s, x, y, \ldots, t)$ in G entspricht genau einem s–t–Weg $Q = (s, x_1, x_2, y_1, y_2, \ldots, t)$ in D und umgekehrt.
    Eine Menge von Wegen in G ist genau dann paarweise innerlich disjunkt, wenn die zugehörigen Wege in D es auch sind. Also ist $d \leq m$.

Satz von Menger (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  Sei d der Wert eines maximalen Flusses f in (D, u, s, t).
  Wir zeigen zunächst, dass $d = m$.
    Jeder Knoten x_1 (für $x \in V(G) \setminus \{s, t\}$) ist Anfangsknoten genau eines Bogens. Dieses ist der innere Bogen (x_1, x_2) mit Kapazität 1.
    Jeder Knoten x_2 (für $x \in V(G) \setminus \{s, t\}$) ist Endknoten genau eines Bogens. Auch dieses ist der innere Bogen (x_1, x_2) mit Kapazität 1.
    Jeder s–t–Weg muss über (mindestens einen) Bogen (x_1, x_2).
    Ein maximaler Fluss mit Wert d in (D, u, s, t) kann daher nur aus d paarweise innerlich disjunkten s–t–Wegen in D bestehen, von denen jeder den Wert 1 zum Flusswert beiträgt.
    Ein s–t–Weg $P = (s, x, y, \ldots, t)$ in G entspricht genau einem s–t–Weg $Q = (s, x_1, x_2, y_1, y_2, \ldots, t)$ in D und umgekehrt.
    Eine Menge von Wegen in G ist genau dann paarweise innerlich disjunkt, wenn die zugehörigen Wege in D es auch sind. Also ist $d \leq m$.
    m innerlich disjunkte Wege induzieren einen Fluss mit Wert m. Also ist $m \leq d$.

Satz von Menger (Forts.)

* Beweis (Forts.):

  Sei d der Wert eines maximalen Flusses f in (D, u, s, t).

  Wir zeigen zunächst, dass $d = m$.

  Jeder Knoten x_1 (für $x \in V(G) \backslash \{s, t\}$) ist Anfangsknoten genau eines Bogens. Dieses ist der innere Bogen (x_1, x_2) mit Kapazität 1.

  Jeder Knoten x_2 (für $x \in V(G) \backslash \{s, t\}$) ist Endknoten genau eines Bogens. Auch dieses ist der innere Bogen (x_1, x_2) mit Kapazität 1.

  Jeder s–t–Weg muss über (mindestens einen) Bogen (x_1, x_2).

  Ein maximaler Fluss mit Wert d in (D, u, s, t) kann daher nur aus d paarweise innerlich disjunkten s–t–Wegen in D bestehen, von denen jeder den Wert 1 zum Flusswert beiträgt.

  Ein s–t–Weg $P = (s, x, y, \ldots, t)$ in G entspricht genau einem s–t–Weg $Q = (s, x_1, x_2, y_1, y_2, \ldots, t)$ in D und umgekehrt.

  Eine Menge von Wegen in G ist genau dann paarweise innerlich disjunkt, wenn die zugehörigen Wege in D es auch sind. Also ist $d \leq m$.

  m innerlich disjunkte Wege induzieren einen Fluss mit Wert m. Also ist $m \leq d$.

  Nach dem Max–Flow–Min–Cut–Theorem gibt es einen Schnitt S_X in D (mit $X \subseteq V(D)$), so dass $u(S_X) = d$.

Satz von Menger (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  - Sei d der Wert eines maximalen Flusses f in (D, u, s, t).
  - Wir zeigen zunächst, dass $d = m$.
    - Jeder Knoten x_1 (für $x \in V(G) \setminus \{s, t\}$) ist Anfangsknoten genau eines Bogens. Dieses ist der innere Bogen (x_1, x_2) mit Kapazität 1.
    - Jeder Knoten x_2 (für $x \in V(G) \setminus \{s, t\}$) ist Endknoten genau eines Bogens. Auch dieses ist der innere Bogen (x_1, x_2) mit Kapazität 1.
    - Jeder s–t–Weg muss über (mindestens einen) Bogen (x_1, x_2).
    - Ein maximaler Fluss mit Wert d in (D, u, s, t) kann daher nur aus d paarweise innerlich disjunkten s–t–Wegen in D bestehen, von denen jeder den Wert 1 zum Flusswert beiträgt.
    - Ein s–t–Weg $P = (s, x, y, \ldots, t)$ in G entspricht genau einem s–t–Weg $Q = (s, x_1, x_2, y_1, y_2, \ldots, t)$ in D und umgekehrt.
    - Eine Menge von Wegen in G ist genau dann paarweise innerlich disjunkt, wenn die zugehörigen Wege in D es auch sind. Also ist $d \leq m$.
    - m innerlich disjunkte Wege induzieren einen Fluss mit Wert m. Also ist $m \leq d$.
  - Nach dem Max–Flow–Min–Cut–Theorem gibt es einen Schnitt S_X in D (mit $X \subseteq V(D)$), so dass $u(S_X) = d$.
  - Da d endlich ist, besteht $S_X = \{(i, j) \in A(D) : i \in X, j \notin X\}$ aus genau d innerer Bögen.

Satz von Menger (Forts.)

* Beweis (Forts.):

  Sei d der Wert eines maximalen Flusses f in (D, u, s, t).

  Wir zeigen zunächst, dass $d = m$.

  Jeder Knoten x_1 (für $x \in V(G) \setminus \{s, t\}$) ist Anfangsknoten genau eines Bogens. Dieses ist der innere Bogen (x_1, x_2) mit Kapazität 1.

  Jeder Knoten x_2 (für $x \in V(G) \setminus \{s, t\}$) ist Endknoten genau eines Bogens. Auch dieses ist der innere Bogen (x_1, x_2) mit Kapazität 1.

  Jeder s-t-Weg muss über (mindestens einen) Bogen (x_1, x_2).

  Ein maximaler Fluss mit Wert d in (D, u, s, t) kann daher nur aus d paarweise innerlich disjunkten s-t-Wegen in D bestehen, von denen jeder den Wert 1 zum Flusswert beiträgt.

  Ein s-t-Weg $P = (s, x, y, \ldots, t)$ in G entspricht genau einem s-t-Weg $Q = (s, x_1, x_2, y_1, y_2, \ldots, t)$ in D und umgekehrt.

  Eine Menge von Wegen in G ist genau dann paarweise innerlich disjunkt, wenn die zugehörigen Wege in D es auch sind. Also ist $d \leq m$.

  m innerlich disjunkte Wege induzieren einen Fluss mit Wert m. Also ist $m \leq d$.

  Nach dem Max-Flow-Min-Cut-Theorem gibt es einen Schnitt S_X in D (mit $X \subseteq V(D)$), so dass $u(S_X) = d$.

  Da d endlich ist, besteht $S_X = \{(i, j) \in A(D) : i \in X, j \notin X\}$ aus genau d innerer Bögen.

  Da S_X ein Schnitt ist, muss jeder s-t-Weg (mind.) einen der Bögen in S_X nutzen.

Satz von Menger (Forts.)

* Beweis (Forts.):
  Sei d der Wert eines maximalen Flusses f in (D, u, s, t).
  Wir zeigen zunächst, dass $d = m$.
    Jeder Knoten x_1 (für $x \in V(G) \setminus \{s, t\}$) ist Anfangsknoten genau eines Bogens. Dieses ist der innere Bogen (x_1, x_2) mit Kapazität 1.
    Jeder Knoten x_2 (für $x \in V(G) \setminus \{s, t\}$) ist Endknoten genau eines Bogens. Auch dieses ist der innere Bogen (x_1, x_2) mit Kapazität 1.
    Jeder s–t–Weg muss über (mindestens einen) Bogen (x_1, x_2).
    Ein maximaler Fluss mit Wert d in (D, u, s, t) kann daher nur aus d paarweise innerlich disjunkten s–t–Wegen in D bestehen, von denen jeder den Wert 1 zum Flusswert beiträgt.
    Ein s–t–Weg $P = (s, x, y, \ldots, t)$ in G entspricht genau einem s–t–Weg $Q = (s, x_1, x_2, y_1, y_2, \ldots, t)$ in D und umgekehrt.
    Eine Menge von Wegen in G ist genau dann paarweise innerlich disjunkt, wenn die zugehörigen Wege in D es auch sind. Also ist $d \leq m$.
    m innerlich disjunkte Wege induzieren einen Fluss mit Wert m. Also ist $m \leq d$.
  Nach dem Max–Flow–Min–Cut–Theorem gibt es einen Schnitt S_X in D (mit $X \subseteq V(D)$), so dass $u(S_X) = d$.
  Da d endlich ist, besteht $S_X = \{(i, j) \in A(D) : i \in X, j \notin X\}$ aus genau d innerer Bögen.
  Da S_X ein Schnitt ist, muss jeder s–t–Weg (mind.) einen der Bögen in S_X nutzen.
  Löscht man die Anfangsknoten $x_1, y_1, \ldots$ der Bögen in S_X, so werden alle gerichteten s–t–Wege in D entfernt.

Satz von Menger (Forts.)

* Beweis (Forts.):

  Sei d der Wert eines maximalen Flusses f in (D, u, s, t).

  Wir zeigen zunächst, dass $d = m$.

  Jeder Knoten x_1 (für $x \in V(G)\backslash\{s,t\}$) ist Anfangsknoten genau eines Bogens. Dieses ist der innere Bogen (x_1, x_2) mit Kapazität 1.

  Jeder Knoten x_2 (für $x \in V(G)\backslash\{s,t\}$) ist Endknoten genau eines Bogens. Auch dieses ist der innere Bogen (x_1, x_2) mit Kapazität 1.

  Jeder s–t–Weg muss über (mindestens einen) Bogen (x_1, x_2).

  Ein maximaler Fluss mit Wert d in (D, u, s, t) kann daher nur aus d paarweise innerlich disjunkten s–t–Wegen in D bestehen, von denen jeder den Wert 1 zum Flusswert beiträgt.

  Ein s–t–Weg $P = (s, x, y, \ldots, t)$ in G entspricht genau einem s–t–Weg $Q = (s, x_1, x_2, y_1, y_2, \ldots, t)$ in D und umgekehrt.

  Eine Menge von Wegen in G ist genau dann paarweise innerlich disjunkt, wenn die zugehörigen Wege in D es auch sind. Also ist $d \leq m$.

  m innerlich disjunkte Wege induzieren einen Fluss mit Wert m. Also ist $m \leq d$.

  Nach dem Max–Flow–Min–Cut–Theorem gibt es einen Schnitt S_X in D (mit $X \subseteq V(D)$), so dass $u(S_X) = d$.

  Da d endlich ist, besteht $S_X = \{(i,j) \in A(D) : i \in X, j \notin X\}$ aus genau d innerer Bögen.

  Da S_X ein Schnitt ist, muss jeder s–t–Weg (mind.) einen der Bögen in S_X nutzen.

  Löscht man die Anfangsknoten $x_1, y_1, \ldots$ der Bögen in S_X, so werden alle gerichteten s–t–Wege in D entfernt.

  Löscht man die zugehörigen Knoten $x, y, \ldots$ in G, so gibt es auch in G keine s–t–Wege mehr. Wir haben eine s–t–trennende Knotenteilmenge $S \subseteq V(G)\backslash\{s,t\}$ gefunden.

Satz von Menger (Forts.)

* Beweis (Forts.):

  Sei d der Wert eines maximalen Flusses f in (D, u, s, t).

  Wir zeigen zunächst, dass $d = m$.

  Jeder Knoten x_1 (für $x \in V(G) \setminus \{s, t\}$) ist Anfangsknoten genau eines Bogens. Dieses ist der innere Bogen (x_1, x_2) mit Kapazität 1.

  Jeder Knoten x_2 (für $x \in V(G) \setminus \{s, t\}$) ist Endknoten genau eines Bogens. Auch dieses ist der innere Bogen (x_1, x_2) mit Kapazität 1.

  Jeder s–t–Weg muss über (mindestens einen) Bogen (x_1, x_2).

  Ein maximaler Fluss mit Wert d in (D, u, s, t) kann daher nur aus d paarweise innerlich disjunkten s–t–Wegen in D bestehen, von denen jeder den Wert 1 zum Flusswert beiträgt.

  Ein s–t–Weg $P = (s, x, y, \ldots, t)$ in G entspricht genau einem s–t–Weg $Q = (s, x_1, x_2, y_1, y_2, \ldots, t)$ in D und umgekehrt.

  Eine Menge von Wegen in G ist genau dann paarweise innerlich disjunkt, wenn die zugehörigen Wege in D es auch sind. Also ist $d \leq m$.

  m innerlich disjunkte Wege induzieren einen Fluss mit Wert m. Also ist $m \leq d$.

  Nach dem Max–Flow–Min–Cut–Theorem gibt es einen Schnitt S_X in D (mit $X \subseteq V(D)$), so dass $u(S_X) = d$.

  Da d endlich ist, besteht $S_X = \{(i, j) \in A(D) : i \in X, j \notin X\}$ aus genau d innerer Bögen.

  Da S_X ein Schnitt ist, muss jeder s–t–Weg (mind.) einen der Bögen in S_X nutzen.

  Löscht man die Anfangsknoten $x_1, y_1, \ldots$ der Bögen in S_X, so werden alle gerichteten s–t–Wege in D entfernt.

  Löscht man die zugehörigen Knoten $x, y, \ldots$ in G, so gibt es auch in G keine s–t–Wege mehr. Wir haben eine s–t–trennende Knotenteilmenge $S \subseteq V(G) \setminus \{s, t\}$ gefunden.

  Damit ist $d \geq n$. Da $d = m$ und $m \leq n$, folgt $m = n$.

Verallgemeinerter Satz von Whitney

Verallgemeinerter Satz von Whitney

* **Satz 17**:
  Ein schlichter Graph ist genau dann n–fach zusammenhängend, wenn für jedes Knotenpaar u, v von G, $u \neq v$, mindestens n paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege existieren.

Verallgemeinerter Satz von Whitney

- **Satz 17**:
Ein schlichter Graph ist genau dann n–fach zusammenhängend, wenn für jedes Knotenpaar u, v von G, $u \neq v$, mindestens n paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege existieren.
- Beweis:

Verallgemeinerter Satz von Whitney

* **Satz 17**:
  Ein schlichter Graph ist genau dann n–fach zusammenhängend, wenn für jedes Knotenpaar u, v von G, $u \neq v$, mindestens n paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege existieren.
* Beweis:

  ($\Rightarrow$) Sei G n–fach zusammenhängend und seien u, v zwei Knoten in G mit $u \neq v$.

Verallgemeinerter Satz von Whitney

* **Satz 17**:
  Ein schlichter Graph ist genau dann n–fach zusammenhängend, wenn für jedes Knotenpaar u, v von G, $u \neq v$, mindestens n paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege existieren.
* Beweis:

  ($\Rightarrow$) Sei G n–fach zusammenhängend und seien u, v zwei Knoten in G mit $u \neq v$.

  1. Fall, u und v sind nicht adjazent.

Verallgemeinerter Satz von Whitney

* **Satz 17**:
  Ein schlichter Graph ist genau dann n–fach zusammenhängend, wenn für jedes Knotenpaar u, v von G, $u \neq v$, mindestens n paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege existieren.
* Beweis:

  ($\Rightarrow$) Sei G n–fach zusammenhängend und seien u, v zwei Knoten in G mit $u \neq v$.

  1. Fall, u und v sind nicht adjazent.

     Sei S eine u–v–trennende Knotenmenge. S enthält mindestens n Knoten.

Verallgemeinerter Satz von Whitney

* **Satz 17**:
  Ein schlichter Graph ist genau dann n–fach zusammenhängend, wenn für jedes Knotenpaar u, v von G, $u \neq v$, mindestens n paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege existieren.
* Beweis:

  ($\Rightarrow$) Sei G n–fach zusammenhängend und seien u, v zwei Knoten in G mit $u \neq v$.

  1. Fall, u und v sind nicht adjazent.

     Sei S eine u–v–trennende Knotenmenge. S enthält mindestens n Knoten.

     Nach Menger gibt es mindestens n paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege.

Verallgemeinerter Satz von Whitney

* **Satz 17**:
  Ein schlichter Graph ist genau dann n–fach zusammenhängend, wenn für jedes Knotenpaar u, v von G, $u \neq v$, mindestens n paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege existieren.
* Beweis:

  ($\Rightarrow$) Sei G n–fach zusammenhängend und seien u, v zwei Knoten in G mit $u \neq v$.

  1. Fall, u und v sind nicht adjazent.

     Sei S eine u–v–trennende Knotenmenge. S enthält mindestens n Knoten.

     Nach Menger gibt es mindestens n paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege.

  2. Fall, u und v sind adjazent, $e = \{u, v\}$.

Verallgemeinerter Satz von Whitney

- **Satz 17**:
  Ein schlichter Graph ist genau dann n–fach zusammenhängend, wenn für jedes Knotenpaar u, v von G, $u \neq v$, mindestens n paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege existieren.
- Beweis:

  ($\Rightarrow$) Sei G n–fach zusammenhängend und seien u, v zwei Knoten in G mit $u \neq v$.

  1. Fall, u und v sind nicht adjazent.

     Sei S eine u–v–trennende Knotenmenge. S enthält mindestens n Knoten.

     Nach Menger gibt es mindestens n paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege.

  2. Fall, u und v sind adjazent, $e = \{u, v\}$.

     Sei $G' := G - e$. In G' sind u und v nicht mehr adjazent.

Verallgemeinerter Satz von Whitney

* **Satz 17**:
  Ein schlichter Graph ist genau dann n–fach zusammenhängend, wenn für jedes Knotenpaar u, v von G, $u \neq v$, mindestens n paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege existieren.
* Beweis:

  ($\Rightarrow$) Sei G n–fach zusammenhängend und seien u, v zwei Knoten in G mit $u \neq v$.

  1. Fall, u und v sind nicht adjazent.

     Sei S eine u–v–trennende Knotenmenge. S enthält mindestens n Knoten.

     Nach Menger gibt es mindestens n paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege.

  2. Fall, u und v sind adjazent, $e = \{u, v\}$.

     Sei $G' := G - e$. In G' sind u und v nicht mehr adjazent.

     G' ist $(n-1)$–fach zusammenhängend.

Verallgemeinerter Satz von Whitney

* **Satz 17**:
  Ein schlichter Graph ist genau dann n–fach zusammenhängend, wenn für jedes Knotenpaar u, v von G, $u \neq v$, mindestens n paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege existieren.
* Beweis:
  - ($\Rightarrow$) Sei G n–fach zusammenhängend und seien u, v zwei Knoten in G mit $u \neq v$.
    1. Fall, u und v sind nicht adjazent.
       - Sei S eine u–v–trennende Knotenmenge. S enthält mindestens n Knoten.
       - Nach Menger gibt es mindestens n paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege.
    2. Fall, u und v sind adjazent, $e = \{u, v\}$.
       - Sei $G' := G - e$. In G' sind u und v nicht mehr adjazent.
       - G' ist $(n-1)$–fach zusammenhängend.
       - Eine u–v–trennende Menge in G' hat mindestens $n-1$ Knoten.

Verallgemeinerter Satz von Whitney

* **Satz 17**:
  Ein schlichter Graph ist genau dann n–fach zusammenhängend, wenn für jedes Knotenpaar u, v von G, $u \neq v$, mindestens n paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege existieren.
* Beweis:
  - ($\Rightarrow$) Sei G n–fach zusammenhängend und seien u, v zwei Knoten in G mit $u \neq v$.
    1. Fall, u und v sind nicht adjazent.
       Sei S eine u–v–trennende Knotenmenge. S enthält mindestens n Knoten.
       Nach Menger gibt es mindestens n paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege.
    2. Fall, u und v sind adjazent, $e = \{u, v\}$.
       Sei $G' := G - e$. In G' sind u und v nicht mehr adjazent.
       G' ist $(n-1)$–fach zusammenhängend.
       Eine u–v–trennende Menge in G' hat mindestens $n-1$ Knoten.
       Nach Menger gibt es mind. $n-1$ paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege in G'.

Verallgemeinerter Satz von Whitney

- **Satz 17**:
  Ein schlichter Graph ist genau dann n–fach zusammenhängend, wenn für jedes Knotenpaar u, v von G, $u \neq v$, mindestens n paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege existieren.
- Beweis:

  ($\Rightarrow$) Sei G n–fach zusammenhängend und seien u, v zwei Knoten in G mit $u \neq v$.

  1. Fall, u und v sind nicht adjazent.

     Sei S eine u–v–trennende Knotenmenge. S enthält mindestens n Knoten.

     Nach Menger gibt es mindestens n paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege.

  2. Fall, u und v sind adjazent, $e = \{u, v\}$.

     Sei $G' := G - e$. In G' sind u und v nicht mehr adjazent.

     G' ist $(n-1)$–fach zusammenhängend.

     Eine u–v–trennende Menge in G' hat mindestens $n-1$ Knoten.

     Nach Menger gibt es mind. $n-1$ paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege in G'.

     Diese $n-1$ Wege gibt es auch in G. Der n–te Weg, paarweise disjunkt zu allen anderen, ist die Kante e von u nach v.

Verallgemeinerter Satz von Whitney

* **Satz 17**:
  Ein schlichter Graph ist genau dann n–fach zusammenhängend, wenn für jedes Knotenpaar u, v von G, $u \neq v$, mindestens n paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege existieren.
* Beweis:

  ($\Rightarrow$) Sei G n–fach zusammenhängend und seien u, v zwei Knoten in G mit $u \neq v$.

  1. Fall, u und v sind nicht adjazent.

     Sei S eine u–v–trennende Knotenmenge. S enthält mindestens n Knoten.

     Nach Menger gibt es mindestens n paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege.

  2. Fall, u und v sind adjazent, $e = \{u, v\}$.

     Sei $G' := G - e$. In G' sind u und v nicht mehr adjazent.

     G' ist $(n-1)$–fach zusammenhängend.

     Eine u–v–trennende Menge in G' hat mindestens $n-1$ Knoten.

     Nach Menger gibt es mind. $n-1$ paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege in G'.

     Diese $n-1$ Wege gibt es auch in G. Der n–te Weg, paarweise disjunkt zu allen anderen, ist die Kante e von u nach v.

  ($\Leftarrow$) Für alle u, v mit $u \neq v$ gebe es mind. n paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege.

Verallgemeinerter Satz von Whitney

* **Satz 17**:
  Ein schlichter Graph ist genau dann n–fach zusammenhängend, wenn für jedes Knotenpaar u, v von G, $u \neq v$, mindestens n paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege existieren.
* Beweis:

  ($\Rightarrow$) Sei G n–fach zusammenhängend und seien u, v zwei Knoten in G mit $u \neq v$.

  1. Fall, u und v sind nicht adjazent.

     Sei S eine u–v–trennende Knotenmenge. S enthält mindestens n Knoten.

     Nach Menger gibt es mindestens n paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege.

  2. Fall, u und v sind adjazent, $e = \{u, v\}$.

     Sei $G' := G - e$. In G' sind u und v nicht mehr adjazent.

     G' ist $(n-1)$–fach zusammenhängend.

     Eine u–v–trennende Menge in G' hat mindestens $n-1$ Knoten.

     Nach Menger gibt es mind. $n-1$ paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege in G'.

     Diese $n-1$ Wege gibt es auch in G. Der n–te Weg, paarweise disjunkt zu allen anderen, ist die Kante e von u nach v.

  ($\Leftarrow$) Für alle u, v mit $u \neq v$ gebe es mind. n paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege.

  1. Fall, u und v sind nicht adjazent.

Verallgemeinerter Satz von Whitney

* **Satz 17**:
  Ein schlichter Graph ist genau dann n–fach zusammenhängend, wenn für jedes Knotenpaar u, v von G, $u \neq v$, mindestens n paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege existieren.
* Beweis:

  ($\Rightarrow$) Sei G n–fach zusammenhängend und seien u, v zwei Knoten in G mit $u \neq v$.

  1. Fall, u und v sind nicht adjazent.

     Sei S eine u–v–trennende Knotenmenge. S enthält mindestens n Knoten.

     Nach Menger gibt es mindestens n paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege.

  2. Fall, u und v sind adjazent, $e = \{u, v\}$.

     Sei $G' := G - e$. In G' sind u und v nicht mehr adjazent.

     G' ist $(n-1)$–fach zusammenhängend.

     Eine u–v–trennende Menge in G' hat mindestens $n-1$ Knoten.

     Nach Menger gibt es mind. $n-1$ paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege in G'.

     Diese $n-1$ Wege gibt es auch in G. Der n–te Weg, paarweise disjunkt zu allen anderen, ist die Kante e von u nach v.

  ($\Leftarrow$) Für alle u, v mit $u \neq v$ gebe es mind. n paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege.

  1. Fall, u und v sind nicht adjazent.

     Dann müssen mind. n Knoten gelöscht werden, um diese Wege zu unterbrechen.

Verallgemeinerter Satz von Whitney

* **Satz 17**:
  Ein schlichter Graph ist genau dann n–fach zusammenhängend, wenn für jedes Knotenpaar u, v von G, $u \neq v$, mindestens n paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege existieren.
* Beweis:

  ($\Rightarrow$) Sei G n–fach zusammenhängend und seien u, v zwei Knoten in G mit $u \neq v$.

  1. Fall, u und v sind nicht adjazent.

     Sei S eine u–v–trennende Knotenmenge. S enthält mindestens n Knoten.

     Nach Menger gibt es mindestens n paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege.

  2. Fall, u und v sind adjazent, $e = \{u, v\}$.

     Sei $G' := G - e$. In G' sind u und v nicht mehr adjazent.

     G' ist $(n-1)$–fach zusammenhängend.

     Eine u–v–trennende Menge in G' hat mindestens $n-1$ Knoten.

     Nach Menger gibt es mind. $n-1$ paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege in G'.

     Diese $n-1$ Wege gibt es auch in G. Der n–te Weg, paarweise disjunkt zu allen anderen, ist die Kante e von u nach v.

  ($\Leftarrow$) Für alle u, v mit $u \neq v$ gebe es mind. n paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege.

  1. Fall, u und v sind nicht adjazent.

     Dann müssen mind. n Knoten gelöscht werden, um diese Wege zu unterbrechen.

  2. Fall, u und v sind adjazent, $e = \{u, v\}$.

Verallgemeinerter Satz von Whitney

- **Satz 17**:
  Ein schlichter Graph ist genau dann n–fach zusammenhängend, wenn für jedes Knotenpaar u, v von G, $u \neq v$, mindestens n paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege existieren.
- Beweis:

  ($\Rightarrow$) Sei G n–fach zusammenhängend und seien u, v zwei Knoten in G mit $u \neq v$.

  1. Fall, u und v sind nicht adjazent.

     Sei S eine u–v–trennende Knotenmenge. S enthält mindestens n Knoten.

     Nach Menger gibt es mindestens n paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege.

  2. Fall, u und v sind adjazent, $e = \{u, v\}$.

     Sei $G' := G - e$. In G' sind u und v nicht mehr adjazent.

     G' ist $(n-1)$–fach zusammenhängend.

     Eine u–v–trennende Menge in G' hat mindestens $n-1$ Knoten.

     Nach Menger gibt es mind. $n-1$ paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege in G'.

     Diese $n-1$ Wege gibt es auch in G. Der n–te Weg, paarweise disjunkt zu allen anderen, ist die Kante e von u nach v.

  ($\Leftarrow$) Für alle u, v mit $u \neq v$ gebe es mind. n paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege.

  1. Fall, u und v sind nicht adjazent.

     Dann müssen mind. n Knoten gelöscht werden, um diese Wege zu unterbrechen.

  2. Fall, u und v sind adjazent, $e = \{u, v\}$.

     Dann müssen mind. $n-1$ Knoten aus den anderen Wegen ($\neq e$) gelöscht werden. Da der Restgraph u.U. immer noch zusammenhängend ist, muss auch noch u oder v gelöscht werden, damit ein unzusammenhänger Graph oder K_1 entsteht.

Verallgemeinerter Satz von Whitney

* **Satz 17**:
  Ein schlichter Graph ist genau dann n–fach zusammenhängend, wenn für jedes Knotenpaar u, v von G, $u \neq v$, mindestens n paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege existieren.
* Beweis:

  ($\Rightarrow$) Sei G n–fach zusammenhängend und seien u, v zwei Knoten in G mit $u \neq v$.

  1. Fall, u und v sind nicht adjazent.

     Sei S eine u–v–trennende Knotenmenge. S enthält mindestens n Knoten.

     Nach Menger gibt es mindestens n paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege.

  2. Fall, u und v sind adjazent, $e = \{u, v\}$.

     Sei $G' := G - e$. In G' sind u und v nicht mehr adjazent.

     G' ist $(n-1)$–fach zusammenhängend.

     Eine u–v–trennende Menge in G' hat mindestens $n - 1$ Knoten.

     Nach Menger gibt es mind. $n - 1$ paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege in G'.

     Diese $n - 1$ Wege gibt es auch in G. Der n–te Weg, paarweise disjunkt zu allen anderen, ist die Kante e von u nach v.

  ($\Leftarrow$) Für alle u, v mit $u \neq v$ gebe es mind. n paarweise innerlich disjunkte u–v–Wege.

  1. Fall, u und v sind nicht adjazent.

     Dann müssen mind. n Knoten gelöscht werden, um diese Wege zu unterbrechen.

  2. Fall, u und v sind adjazent, $e = \{u, v\}$.

     Dann müssen mind. $n - 1$ Knoten aus den anderen Wegen ($\neq e$) gelöscht werden. Da der Restgraph u.U. immer noch zusammenhängend ist, muss auch noch u oder v gelöscht werden, damit ein unzusammenhänger Graph oder K_1 entsteht.

  Also ist G n–fach zusammenhängend.

Menger, Whitney & Kantenzusammenhang

Menger, Whitney & Kantenzusammenhang

* **Satz 18** (Kantenversion des Satzes von Menger):
  Seien u und v zwei Knoten eines Graphen G. Dann ist die maximale Anzahl paarweise kantendisjunkter u–v–Wege in G genauso groß wie die minimale Anzahl von Kanten einer u–v–trennenden Menge.

Menger, Whitney & Kantenzusammenhang

* **Satz 18** (Kantenversion des Satzes von Menger):
  Seien u und v zwei Knoten eines Graphen G. Dann ist die maximale Anzahl paarweise kantendisjunkter u–v–Wege in G genauso groß wie die minimale Anzahl von Kanten einer u–v–trennenden Menge.
* Beweis: Übung.

Menger, Whitney & Kantenzusammenhang

* **Satz 18** (Kantenversion des Satzes von Menger):
  Seien u und v zwei Knoten eines Graphen G. Dann ist die maximale Anzahl paarweise kantendisjunkter u–v–Wege in G genauso groß wie die minimale Anzahl von Kanten einer u–v–trennenden Menge.
* Beweis: Übung.
* **Definition 19**:
  Sei G ein schlichter Graph. Die **Kantenzusammenhangszahl** $\kappa_e(G)$ ist die kleinste Anzahl von Kanten in G, deren Entfernen zu einem unzusammenhängenden Graphen oder einem **leeren Graphen** (d.h. ein Graph ohne Kanten) führt.

Menger, Whitney & Kantenzusammenhang

* **Satz 18** (Kantenversion des Satzes von Menger):
  Seien u und v zwei Knoten eines Graphen G. Dann ist die maximale Anzahl paarweise kantendisjunkter u–v–Wege in G genauso groß wie die minimale Anzahl von Kanten einer u–v–trennenden Menge.
* Beweis: Übung.
* **Definition 19**:
  Sei G ein schlichter Graph. Die **Kantenzusammenhangszahl** $\kappa_e(G)$ ist die kleinste Anzahl von Kanten in G, deren Entfernen zu einem unzusammenhängenden Graphen oder einem **leeren Graphen** (d.h. ein Graph ohne Kanten) führt.
* Beispiele:

Menger, Whitney & Kantenzusammenhang

* **Satz 18** (Kantenversion des Satzes von Menger):
  Seien u und v zwei Knoten eines Graphen G. Dann ist die maximale Anzahl paarweise kantendisjunkter u–v–Wege in G genauso groß wie die minimale Anzahl von Kanten einer u–v–trennenden Menge.
* Beweis: Übung.
* **Definition 19**:
  Sei G ein schlichter Graph. Die **Kantenzusammenhangszahl** $\kappa_e(G)$ ist die kleinste Anzahl von Kanten in G, deren Entfernen zu einem unzusammenhängenden Graphen oder einem **leeren Graphen** (d.h. ein Graph ohne Kanten) führt.
* Beispiele:
  * Für einen unzusammenhängenden oder leeren Graphen G gilt $\kappa_e(G) = 0$.

Menger, Whitney & Kantenzusammenhang

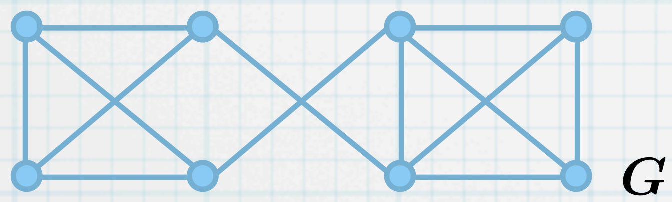
* **Satz 18** (Kantenversion des Satzes von Menger):
  Seien u und v zwei Knoten eines Graphen G. Dann ist die maximale Anzahl paarweise kantendisjunkter u–v–Wege in G genauso groß wie die minimale Anzahl von Kanten einer u–v–trennenden Menge.
* Beweis: Übung.
* **Definition 19**:
  Sei G ein schlichter Graph. Die **Kantenzusammenhangszahl** $\kappa_e(G)$ ist die kleinste Anzahl von Kanten in G, deren Entfernen zu einem unzusammenhängenden Graphen oder einem **leeren Graphen** (d.h. ein Graph ohne Kanten) führt.
* Beispiele:
  * Für einen unzusammenhängenden oder leeren Graphen G gilt $\kappa_e(G) = 0$.
  * Für einen Graphen mit einer Brücke ist $\kappa_e(G) = 1$.

Menger, Whitney & Kantenzusammenhang

* **Satz 18** (Kantenversion des Satzes von Menger):
  Seien u und v zwei Knoten eines Graphen G. Dann ist die maximale Anzahl paarweise kantendisjunkter u–v–Wege in G genauso groß wie die minimale Anzahl von Kanten einer u–v–trennenden Menge.
* Beweis: Übung.
* **Definition 19**:
  Sei G ein schlichter Graph. Die **Kantenzusammenhangszahl** $\kappa_e(G)$ ist die kleinste Anzahl von Kanten in G, deren Entfernen zu einem unzusammenhängenden Graphen oder einem **leeren Graphen** (d.h. ein Graph ohne Kanten) führt.
* Beispiele:
  * Für einen unzusammenhängenden oder leeren Graphen G gilt $\kappa_e(G) = 0$.
  * Für einen Graphen mit einer Brücke ist $\kappa_e(G) = 1$.
  * Für den unten abgebildeten Graphen G ist $\kappa_e(G) = 2$.

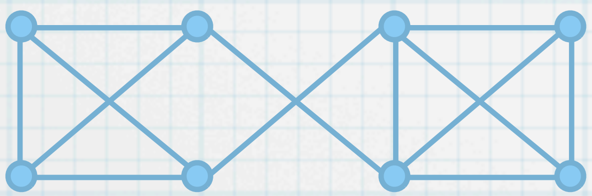
Menger, Whitney & Kantenzusammenhang

* **Satz 18** (Kantenversion des Satzes von Menger):
  Seien u und v zwei Knoten eines Graphen G. Dann ist die maximale Anzahl paarweise kantendisjunkter u–v–Wege in G genauso groß wie die minimale Anzahl von Kanten einer u–v–trennenden Menge.
* Beweis: Übung.
* **Definition 19**:
  Sei G ein schlichter Graph. Die **Kantenzusammenhangszahl** $\kappa_e(G)$ ist die kleinste Anzahl von Kanten in G, deren Entfernen zu einem unzusammenhängenden Graphen oder einem **leeren Graphen** (d.h. ein Graph ohne Kanten) führt.
* Beispiele:
  * Für einen unzusammenhängenden oder leeren Graphen G gilt $\kappa_e(G) = 0$.
  * Für einen Graphen mit einer Brücke ist $\kappa_e(G) = 1$.
  * Für den unten abgebildeten Graphen G ist $\kappa_e(G) = 2$.



Menger, Whitney & Kantenzusammenhang

* **Satz 18** (Kantenversion des Satzes von Menger):
  Seien u und v zwei Knoten eines Graphen G. Dann ist die maximale Anzahl paarweise kantendisjunkter u–v–Wege in G genauso groß wie die minimale Anzahl von Kanten einer u–v–trennenden Menge.
* Beweis: Übung.
* **Definition 19**:
  Sei G ein schlichter Graph. Die **Kantenzusammenhangszahl** $\kappa_e(G)$ ist die kleinste Anzahl von Kanten in G, deren Entfernen zu einem unzusammenhängenden Graphen oder einem **leeren Graphen** (d.h. ein Graph ohne Kanten) führt.
* Beispiele:
  * Für einen unzusammenhängenden oder leeren Graphen G gilt $\kappa_e(G) = 0$.
  * Für einen Graphen mit einer Brücke ist $\kappa_e(G) = 1$.
  * Für den unten abgebildeten Graphen G ist $\kappa_e(G) = 2$.

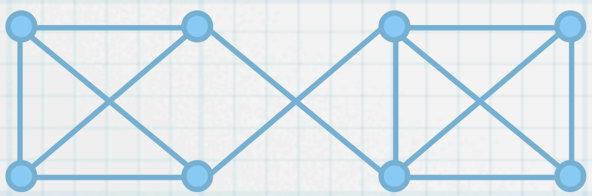


G

* **Definition 20**:
  Ein schlichter Graph G heißt k**–fach kantenzusammenhängend** ($k \geq 1$), wenn $\kappa_e(G) \geq k$ ist.

Menger, Whitney & Kantenzusammenhang

* **Satz 18** (Kantenversion des Satzes von Menger):
  Seien u und v zwei Knoten eines Graphen G. Dann ist die maximale Anzahl paarweise kantendisjunkter u–v–Wege in G genauso groß wie die minimale Anzahl von Kanten einer u–v–trennenden Menge.
* Beweis: Übung.
* **Definition 19**:
  Sei G ein schlichter Graph. Die **Kantenzusammenhangszahl** $\kappa_e(G)$ ist die kleinste Anzahl von Kanten in G, deren Entfernen zu einem unzusammenhängenden Graphen oder einem **leeren Graphen** (d.h. ein Graph ohne Kanten) führt.
* Beispiele:
  * Für einen unzusammenhängenden oder leeren Graphen G gilt $\kappa_e(G) = 0$.
  * Für einen Graphen mit einer Brücke ist $\kappa_e(G) = 1$.
  * Für den unten abgebildeten Graphen G ist $\kappa_e(G) = 2$.

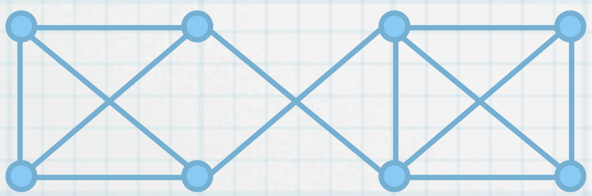


G

* **Definition 20**:
  Ein schlichter Graph G heißt **k–fach kantenzusammenhängend** ($k \geq 1$), wenn $\kappa_e(G) \geq k$ ist.
* **Satz 21** (Kantenversion des verallgemeinerten Satzes von Whitney):
  Ein schlichter Graph G ist dann und nur dann n–fach kantenzusammenhängend, wenn es für jedes Knotenpaar u, v mit $u \neq v$ mindestens n paarweise verschiedene kantendisjunkte Wege von u nach v gibt.

Menger, Whitney & Kantenzusammenhang

* **Satz 18** (Kantenversion des Satzes von Menger):
Seien u und v zwei Knoten eines Graphen G. Dann ist die maximale Anzahl paarweise kantendisjunkter u–v–Wege in G genauso groß wie die minimale Anzahl von Kanten einer u–v–trennenden Menge.
* Beweis: Übung.
* **Definition 19**:
Sei G ein schlichter Graph. Die **Kantenzusammenhangszahl** $\kappa_e(G)$ ist die kleinste Anzahl von Kanten in G, deren Entfernen zu einem unzusammenhängenden Graphen oder einem **leeren Graphen** (d.h. ein Graph ohne Kanten) führt.
* Beispiele:
    * Für einen unzusammenhängenden oder leeren Graphen G gilt $\kappa_e(G) = 0$.
    * Für einen Graphen mit einer Brücke ist $\kappa_e(G) = 1$.
    * Für den unten abgebildeten Graphen G ist $\kappa_e(G) = 2$.



G

* **Definition 20**:
Ein schlichter Graph G heißt k–**fach kantenzusammenhängend** ($k \geq 1$), wenn $\kappa_e(G) \geq k$ ist.
* **Satz 21** (Kantenversion des verallgemeinerten Satzes von Whitney):
Ein schlichter Graph G ist dann und nur dann n–fach kantenzusammenhängend, wenn es für jedes Knotenpaar u, v mit $u \neq v$ mindestens n paarweise verschiedene kantendisjunkte Wege von u nach v gibt.
* Beweis: Übung.

Beziehung zwischen Knoten- und Kantenzusammenhang

Beziehung zwischen Knoten- und Kantenzusammenhang

* **Satz 22**:
  Sei G ein schlichter Graph und $\delta(G) := \min\{\deg(v) : v \in G\}$. Dann ist $\kappa(G) \leq \kappa_e(G) \leq \delta(G)$.

Beziehung zwischen Knoten- und Kantenzusammenhang

* **Satz 22**:
  Sei G ein schlichter Graph und $\delta(G) := \min\{\deg(v) : v \in G\}$. Dann ist $\kappa(G) \leq \kappa_e(G) \leq \delta(G)$.
* Beweis:

Beziehung zwischen Knoten- und Kantenzusammenhang

* **Satz 22**:
  Sei G ein schlichter Graph und $\delta(G) := \min\{\deg(v) : v \in G\}$. Dann ist $\kappa(G) \leq \kappa_e(G) \leq \delta(G)$.
* Beweis:
  Sei v ein Knoten mit $\deg(v) = \delta(G) \geq 0$.

Beziehung zwischen Knoten- und Kantenzusammenhang

* **Satz 22**:
  Sei G ein schlichter Graph und $\delta(G) := \min\{\deg(v) : v \in G\}$. Dann ist $\kappa(G) \leq \kappa_e(G) \leq \delta(G)$.
* Beweis:
  Sei v ein Knoten mit $\deg(v) = \delta(G) \geq 0$.
  Nach Entfernen der $\delta(G)$ mit v inzidenten Kanten ist G unzusammenhängend oder leer.

Beziehung zwischen Knoten- und Kantenzusammenhang

* **Satz 22**:
  Sei G ein schlichter Graph und $\delta(G) := \min\{\deg(v) : v \in G\}$. Dann ist $\kappa(G) \leq \kappa_e(G) \leq \delta(G)$.
* Beweis:
  Sei v ein Knoten mit $\deg(v) = \delta(G) \geq 0$.
  Nach Entfernen der $\delta(G)$ mit v inzidenten Kanten ist G unzusammenhängend oder leer.
  Danach ist v ein isolierter Knoten. Also ist $\kappa_e(G) \leq \delta(G)$.

Beziehung zwischen Knoten- und Kantenzusammenhang

* **Satz 22**:
  Sei G ein schlichter Graph und $\delta(G) := \min\{\deg(v) : v \in G\}$. Dann ist $\kappa(G) \leq \kappa_e(G) \leq \delta(G)$.
* Beweis:

  Sei v ein Knoten mit $\deg(v) = \delta(G) \geq 0$.

  Nach Entfernen der $\delta(G)$ mit v inzidenten Kanten ist G unzusammenhängend oder leer.

  Danach ist v ein isolierter Knoten. Also ist $\kappa_e(G) \leq \delta(G)$.

  1. Fall, $\kappa_e(G) = 0$. Dann ist G nichtzusammenhängend oder leer. Also ist $\kappa(G) = 0$.

Beziehung zwischen Knoten- und Kantenzusammenhang

* **Satz 22**:
  Sei G ein schlichter Graph und $\delta(G) := \min\{\deg(v) : v \in G\}$. Dann ist $\kappa(G) \leq \kappa_e(G) \leq \delta(G)$.
* Beweis:

  Sei v ein Knoten mit $\deg(v) = \delta(G) \geq 0$.

  Nach Entfernen der $\delta(G)$ mit v inzidenten Kanten ist G unzusammenhängend oder leer.

  Danach ist v ein isolierter Knoten. Also ist $\kappa_e(G) \leq \delta(G)$.

  1. Fall, $\kappa_e(G) = 0$. Dann ist G nichtzusammenhängend oder leer. Also ist $\kappa(G) = 0$.

  2. Fall, $\kappa_e(G) = 1$. Dann ist G zusammenhängend und hat eine Brücke $e = \{u, v\}$.

Beziehung zwischen Knoten- und Kantenzusammenhang

* **Satz 22**:
  Sei G ein schlichter Graph und $\delta(G) := \min\{\deg(v) : v \in G\}$. Dann ist $\kappa(G) \leq \kappa_e(G) \leq \delta(G)$.
* Beweis:

  Sei v ein Knoten mit $\deg(v) = \delta(G) \geq 0$.

  Nach Entfernen der $\delta(G)$ mit v inzidenten Kanten ist G unzusammenhängend oder leer.

  Danach ist v ein isolierter Knoten. Also ist $\kappa_e(G) \leq \delta(G)$.

  1. Fall, $\kappa_e(G) = 0$. Dann ist G nichtzusammenhängend oder leer. Also ist $\kappa(G) = 0$.

  2. Fall, $\kappa_e(G) = 1$. Dann ist G zusammenhängend und hat eine Brücke $e = \{u, v\}$.

     Nach Lemma 7 ist entweder $G = K_2$ oder G hat einen Zerlegungsknoten (u oder v).

Beziehung zwischen Knoten- und Kantenzusammenhang

* **Satz 22**:
  Sei G ein schlichter Graph und $\delta(G) := \min\{\deg(v) : v \in G\}$. Dann ist $\kappa(G) \leq \kappa_e(G) \leq \delta(G)$.
* Beweis:
  Sei v ein Knoten mit $\deg(v) = \delta(G) \geq 0$.
  Nach Entfernen der $\delta(G)$ mit v inzidenten Kanten ist G unzusammenhängend oder leer.
  Danach ist v ein isolierter Knoten. Also ist $\kappa_e(G) \leq \delta(G)$.
  1. Fall, $\kappa_e(G) = 0$. Dann ist G nichtzusammenhängend oder leer. Also ist $\kappa(G) = 0$.
  2. Fall, $\kappa_e(G) = 1$. Dann ist G zusammenhängend und hat eine Brücke $e = \{u, v\}$.
     Nach Lemma 7 ist entweder $G = K_2$ oder G hat einen Zerlegungsknoten (u oder v).
     In beiden Fällen ist $\kappa(G) = 1$.

Beziehung zwischen Knoten- und Kantenzusammenhang

* **Satz 22**:
  Sei G ein schlichter Graph und $\delta(G) := \min\{\deg(v) : v \in G\}$. Dann ist $\kappa(G) \leq \kappa_e(G) \leq \delta(G)$.
* Beweis:
  Sei v ein Knoten mit $\deg(v) = \delta(G) \geq 0$.
  Nach Entfernen der $\delta(G)$ mit v inzidenten Kanten ist G unzusammenhängend oder leer.
  Danach ist v ein isolierter Knoten. Also ist $\kappa_e(G) \leq \delta(G)$.
  1. Fall, $\kappa_e(G) = 0$. Dann ist G nichtzusammenhängend oder leer. Also ist $\kappa(G) = 0$.
  2. Fall, $\kappa_e(G) = 1$. Dann ist G zusammenhängend und hat eine Brücke $e = \{u, v\}$.
     Nach Lemma 7 ist entweder $G = K_2$ oder G hat einen Zerlegungsknoten (u oder v).
     In beiden Fällen ist $\kappa(G) = 1$.
  3. Fall, $k := \kappa_e(G) \geq 2$.

Beziehung zwischen Knoten- und Kantenzusammenhang

* **Satz 22**:
  Sei G ein schlichter Graph und $\delta(G) := \min\{\deg(v) : v \in G\}$. Dann ist $\kappa(G) \leq \kappa_e(G) \leq \delta(G)$.
* Beweis:
  Sei v ein Knoten mit $\deg(v) = \delta(G) \geq 0$.
  Nach Entfernen der $\delta(G)$ mit v inzidenten Kanten ist G unzusammenhängend oder leer.
  Danach ist v ein isolierter Knoten. Also ist $\kappa_e(G) \leq \delta(G)$.
  1. Fall, $\kappa_e(G) = 0$. Dann ist G nichtzusammenhängend oder leer. Also ist $\kappa(G) = 0$.
  2. Fall, $\kappa_e(G) = 1$. Dann ist G zusammenhängend und hat eine Brücke $e = \{u, v\}$.
     Nach Lemma 7 ist entweder $G = K_2$ oder G hat einen Zerlegungsknoten (u oder v).
     In beiden Fällen ist $\kappa(G) = 1$.
  3. Fall, $k := \kappa_e(G) \geq 2$.
     Dann gibt es eine Kantenmenge $F := \{e_1, \ldots, e_k\}$, so dass $G - F$ unzusammenhängend ist, aber keine kleinere Kantenmenge dieses schafft.

Beziehung zwischen Knoten- und Kantenzusammenhang

* **Satz 22**:
  Sei G ein schlichter Graph und $\delta(G) := \min\{\deg(v) : v \in G\}$. Dann ist $\kappa(G) \leq \kappa_e(G) \leq \delta(G)$.
* Beweis:
  Sei v ein Knoten mit $\deg(v) = \delta(G) \geq 0$.
  Nach Entfernen der $\delta(G)$ mit v inzidenten Kanten ist G unzusammenhängend oder leer.
  Danach ist v ein isolierter Knoten. Also ist $\kappa_e(G) \leq \delta(G)$.
  1. Fall, $\kappa_e(G) = 0$. Dann ist G nichtzusammenhängend oder leer. Also ist $\kappa(G) = 0$.
  2. Fall, $\kappa_e(G) = 1$. Dann ist G zusammenhängend und hat eine Brücke $e = \{u, v\}$.
     Nach Lemma 7 ist entweder $G = K_2$ oder G hat einen Zerlegungsknoten (u oder v).
     In beiden Fällen ist $\kappa(G) = 1$.
  3. Fall, $k := \kappa_e(G) \geq 2$.
     Dann gibt es eine Kantenmenge $F := \{e_1, \ldots, e_k\}$, so dass $G - F$ unzusammenhängend ist, aber keine kleinere Kantenmenge dieses schafft.
     Entfernen wir nur $F' := \{e_1, \ldots, e_{k-1}\}$, so ist $G' := G - F'$ noch zusammenhängend.

Beziehung zwischen Knoten- und Kantenzusammenhang

* **Satz 22**:
  Sei G ein schlichter Graph und $\delta(G) := \min\{\deg(v) : v \in G\}$. Dann ist $\kappa(G) \leq \kappa_e(G) \leq \delta(G)$.
* Beweis:

  Sei v ein Knoten mit $\deg(v) = \delta(G) \geq 0$.

  Nach Entfernen der $\delta(G)$ mit v inzidenten Kanten ist G unzusammenhängend oder leer.

  Danach ist v ein isolierter Knoten. Also ist $\kappa_e(G) \leq \delta(G)$.

  1. Fall, $\kappa_e(G) = 0$. Dann ist G nichtzusammenhängend oder leer. Also ist $\kappa(G) = 0$.

  2. Fall, $\kappa_e(G) = 1$. Dann ist G zusammenhängend und hat eine Brücke $e = \{u, v\}$.

     Nach Lemma 7 ist entweder $G = K_2$ oder G hat einen Zerlegungsknoten (u oder v).

     In beiden Fällen ist $\kappa(G) = 1$.

  3. Fall, $k := \kappa_e(G) \geq 2$.

     Dann gibt es eine Kantenmenge $F := \{e_1, \ldots, e_k\}$, so dass $G - F$ unzusammenhängend ist, aber keine kleinere Kantenmenge dieses schafft.

     Entfernen wir nur $F' := \{e_1, \ldots, e_{k-1}\}$, so ist $G' := G - F'$ noch zusammenhängend.

     $e_k = \{u, v\}$ ist Brücke in G'.

Beziehung zwischen Knoten- und Kantenzusammenhang

* **Satz 22**:
  Sei G ein schlichter Graph und $\delta(G) := \min\{\deg(v) : v \in G\}$. Dann ist $\kappa(G) \leq \kappa_e(G) \leq \delta(G)$.
* Beweis:
  - Sei v ein Knoten mit $\deg(v) = \delta(G) \geq 0$.
  - Nach Entfernen der $\delta(G)$ mit v inzidenten Kanten ist G unzusammenhängend oder leer.
  - Danach ist v ein isolierter Knoten. Also ist $\kappa_e(G) \leq \delta(G)$.
  - 1. Fall, $\kappa_e(G) = 0$. Dann ist G nichtzusammenhängend oder leer. Also ist $\kappa(G) = 0$.
  - 2. Fall, $\kappa_e(G) = 1$. Dann ist G zusammenhängend und hat eine Brücke $e = \{u, v\}$.
    - Nach Lemma 7 ist entweder $G = K_2$ oder G hat einen Zerlegungsknoten (u oder v).
    - In beiden Fällen ist $\kappa(G) = 1$.
  - 3. Fall, $k := \kappa_e(G) \geq 2$.
    - Dann gibt es eine Kantenmenge $F := \{e_1, \ldots, e_k\}$, so dass $G - F$ unzusammenhängend ist, aber keine kleinere Kantenmenge dieses schafft.
    - Entfernen wir nur $F' := \{e_1, \ldots, e_{k-1}\}$, so ist $G' := G - F'$ noch zusammenhängend.
    - $e_k = \{u, v\}$ ist Brücke in G'.
    - Für jedes i in $\{1, \ldots, k-1\}$ wähle einen Endknoten u_i von Kante e_i, so dass $u_i \notin \{u, u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_{k-1}\}$. Dieses ist möglich, da G schlicht ist.

Beziehung zwischen Knoten- und Kantenzusammenhang

* **Satz 22**:
  Sei G ein schlichter Graph und $\delta(G) := \min\{\deg(v) : v \in G\}$. Dann ist $\kappa(G) \leq \kappa_e(G) \leq \delta(G)$.
* Beweis:

  Sei v ein Knoten mit $\deg(v) = \delta(G) \geq 0$.

  Nach Entfernen der $\delta(G)$ mit v inzidenten Kanten ist G unzusammenhängend oder leer.

  Danach ist v ein isolierter Knoten. Also ist $\kappa_e(G) \leq \delta(G)$.

  1. Fall, $\kappa_e(G) = 0$. Dann ist G nichtzusammenhängend oder leer. Also ist $\kappa(G) = 0$.

  2. Fall, $\kappa_e(G) = 1$. Dann ist G zusammenhängend und hat eine Brücke $e = \{u, v\}$.

     Nach Lemma 7 ist entweder $G = K_2$ oder G hat einen Zerlegungsknoten (u oder v).

     In beiden Fällen ist $\kappa(G) = 1$.

  3. Fall, $k := \kappa_e(G) \geq 2$.

     Dann gibt es eine Kantenmenge $F := \{e_1, \ldots, e_k\}$, so dass $G - F$ unzusammenhängend ist, aber keine kleinere Kantenmenge dieses schafft.

     Entfernen wir nur $F' := \{e_1, \ldots, e_{k-1}\}$, so ist $G' := G - F'$ noch zusammenhängend.

     $e_k = \{u, v\}$ ist Brücke in G'.

     Für jedes i in $\{1, \ldots, k-1\}$ wähle einen Endknoten u_i von Kante e_i, so dass $u_i \notin \{u, u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_{k-1}\}$. Dieses ist möglich, da G schlicht ist.

     Sei $H := G - \{u_1, \ldots, u_{k-1}\}$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Beziehung zwischen Knoten- und Kantenzusammenhang

* **Satz 22**:
  Sei G ein schlichter Graph und $\delta(G) := \min\{\deg(v) : v \in G\}$. Dann ist $\kappa(G) \leq \kappa_e(G) \leq \delta(G)$.
* Beweis:

  Sei v ein Knoten mit $\deg(v) = \delta(G) \geq 0$.

  Nach Entfernen der $\delta(G)$ mit v inzidenten Kanten ist G unzusammenhängend oder leer.

  Danach ist v ein isolierter Knoten. Also ist $\kappa_e(G) \leq \delta(G)$.

  1. Fall, $\kappa_e(G) = 0$. Dann ist G nichtzusammenhängend oder leer. Also ist $\kappa(G) = 0$.

  2. Fall, $\kappa_e(G) = 1$. Dann ist G zusammenhängend und hat eine Brücke $e = \{u, v\}$.

     Nach Lemma 7 ist entweder $G = K_2$ oder G hat einen Zerlegungsknoten (u oder v).

     In beiden Fällen ist $\kappa(G) = 1$.

  3. Fall, $k := \kappa_e(G) \geq 2$.

     Dann gibt es eine Kantenmenge $F := \{e_1, \ldots, e_k\}$, so dass $G - F$ unzusammenhängend ist, aber keine kleinere Kantenmenge dieses schafft.

     Entfernen wir nur $F' := \{e_1, \ldots, e_{k-1}\}$, so ist $G' := G - F'$ noch zusammenhängend.

     $e_k = \{u, v\}$ ist Brücke in G'.

     Für jedes i in $\{1, \ldots, k-1\}$ wähle einen Endknoten u_i von Kante e_i, so dass $u_i \notin \{u, u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_{k-1}\}$. Dieses ist möglich, da G schlicht ist.

     Sei $H := G - \{u_1, \ldots, u_{k-1}\}$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

     1. Fall, H ist unzusammenhängend. Dann ist $\kappa(G) \leq k - 1 < k = \kappa_e(G)$.

Beziehung zwischen Knoten- und Kantenzusammenhang

* **Satz 22**:
  Sei G ein schlichter Graph und $\delta(G) := \min\{\deg(v) : v \in G\}$. Dann ist $\kappa(G) \leq \kappa_e(G) \leq \delta(G)$.
* Beweis:

  Sei v ein Knoten mit $\deg(v) = \delta(G) \geq 0$.

  Nach Entfernen der $\delta(G)$ mit v inzidenten Kanten ist G unzusammenhängend oder leer.

  Danach ist v ein isolierter Knoten. Also ist $\kappa_e(G) \leq \delta(G)$.

  1. Fall, $\kappa_e(G) = 0$. Dann ist G nichtzusammenhängend oder leer. Also ist $\kappa(G) = 0$.

  2. Fall, $\kappa_e(G) = 1$. Dann ist G zusammenhängend und hat eine Brücke $e = \{u, v\}$.

     Nach Lemma 7 ist entweder $G = K_2$ oder G hat einen Zerlegungsknoten (u oder v).

     In beiden Fällen ist $\kappa(G) = 1$.

  3. Fall, $k := \kappa_e(G) \geq 2$.

     Dann gibt es eine Kantenmenge $F := \{e_1, \dots, e_k\}$, so dass $G - F$ unzusammenhängend ist, aber keine kleinere Kantenmenge dieses schafft.

     Entfernen wir nur $F' := \{e_1, \dots, e_{k-1}\}$, so ist $G' := G - F'$ noch zusammenhängend.

     $e_k = \{u, v\}$ ist Brücke in G'.

     Für jedes i in $\{1, \dots, k-1\}$ wähle einen Endknoten u_i von Kante e_i, so dass $u_i \notin \{u, u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_{k-1}\}$. Dieses ist möglich, da G schlicht ist.

     Sei $H := G - \{u_1, \dots, u_{k-1}\}$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

     1. Fall, H ist unzusammenhängend. Dann ist $\kappa(G) \leq k - 1 < k = \kappa_e(G)$.

     2. Fall, H ist zusammenhängend.

Beziehung zwischen Knoten- und Kantenzusammenhang

* **Satz 22**:
  Sei G ein schlichter Graph und $\delta(G) := \min\{\deg(v) : v \in G\}$. Dann ist $\kappa(G) \leq \kappa_e(G) \leq \delta(G)$.
* Beweis:

  Sei v ein Knoten mit $\deg(v) = \delta(G) \geq 0$.

  Nach Entfernen der $\delta(G)$ mit v inzidenten Kanten ist G unzusammenhängend oder leer.

  Danach ist v ein isolierter Knoten. Also ist $\kappa_e(G) \leq \delta(G)$.

  1. Fall, $\kappa_e(G) = 0$. Dann ist G nichtzusammenhängend oder leer. Also ist $\kappa(G) = 0$.

  2. Fall, $\kappa_e(G) = 1$. Dann ist G zusammenhängend und hat eine Brücke $e = \{u, v\}$.

     Nach Lemma 7 ist entweder $G = K_2$ oder G hat einen Zerlegungsknoten (u oder v).

     In beiden Fällen ist $\kappa(G) = 1$.

  3. Fall, $k := \kappa_e(G) \geq 2$.

     Dann gibt es eine Kantenmenge $F := \{e_1, \ldots, e_k\}$, so dass $G - F$ unzusammenhängend ist, aber keine kleinere Kantenmenge dieses schafft.

     Entfernen wir nur $F' := \{e_1, \ldots, e_{k-1}\}$, so ist $G' := G - F'$ noch zusammenhängend.

     $e_k = \{u, v\}$ ist Brücke in G'.

     Für jedes i in $\{1, \ldots, k-1\}$ wähle einen Endknoten u_i von Kante e_i, so dass $u_i \notin \{u, u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_{k-1}\}$. Dieses ist möglich, da G schlicht ist.

     Sei $H := G - \{u_1, \ldots, u_{k-1}\}$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

     1. Fall, H ist unzusammenhängend. Dann ist $\kappa(G) \leq k - 1 < k = \kappa_e(G)$.

     2. Fall, H ist zusammenhängend.

        H ist Untergraph von G' und $e_k = \{u, v\}$ ist Brücke in H.

Beziehung zwischen Knoten- und Kantenzusammenhang

* **Satz 22**:
  Sei G ein schlichter Graph und $\delta(G) := \min\{\deg(v) : v \in G\}$. Dann ist $\kappa(G) \leq \kappa_e(G) \leq \delta(G)$.
* Beweis:

  Sei v ein Knoten mit $\deg(v) = \delta(G) \geq 0$.

  Nach Entfernen der $\delta(G)$ mit v inzidenten Kanten ist G unzusammenhängend oder leer.

  Danach ist v ein isolierter Knoten. Also ist $\kappa_e(G) \leq \delta(G)$.

  1. Fall, $\kappa_e(G) = 0$. Dann ist G nichtzusammenhängend oder leer. Also ist $\kappa(G) = 0$.

  2. Fall, $\kappa_e(G) = 1$. Dann ist G zusammenhängend und hat eine Brücke $e = \{u, v\}$.

     Nach Lemma 7 ist entweder $G = K_2$ oder G hat einen Zerlegungsknoten (u oder v).

     In beiden Fällen ist $\kappa(G) = 1$.

  3. Fall, $k := \kappa_e(G) \geq 2$.

     Dann gibt es eine Kantenmenge $F := \{e_1, \ldots, e_k\}$, so dass $G - F$ unzusammenhängend ist, aber keine kleinere Kantenmenge dieses schafft.

     Entfernen wir nur $F' := \{e_1, \ldots, e_{k-1}\}$, so ist $G' := G - F'$ noch zusammenhängend.

     $e_k = \{u, v\}$ ist Brücke in G'.

     Für jedes i in $\{1, \ldots, k-1\}$ wähle einen Endknoten u_i von Kante e_i, so dass $u_i \notin \{u, u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_{k-1}\}$. Dieses ist möglich, da G schlicht ist.

     Sei $H := G - \{u_1, \ldots, u_{k-1}\}$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

     1. Fall, H ist unzusammenhängend. Dann ist $\kappa(G) \leq k - 1 < k = \kappa_e(G)$.

     2. Fall, H ist zusammenhängend.

        H ist Untergraph von G' und $e_k = \{u, v\}$ ist Brücke in H.

        Nach Lemma 7 ist $H = K_2$ oder H hat einen Zerlegungsknoten (u oder v).

Beziehung zwischen Knoten- und Kantenzusammenhang

* **Satz 22**:
  Sei G ein schlichter Graph und $\delta(G) := \min\{\deg(v) : v \in G\}$. Dann ist $\kappa(G) \leq \kappa_e(G) \leq \delta(G)$.
* Beweis:
  Sei v ein Knoten mit $\deg(v) = \delta(G) \geq 0$.
  Nach Entfernen der $\delta(G)$ mit v inzidenten Kanten ist G unzusammenhängend oder leer.
  Danach ist v ein isolierter Knoten. Also ist $\kappa_e(G) \leq \delta(G)$.
  1. Fall, $\kappa_e(G) = 0$. Dann ist G nichtzusammenhängend oder leer. Also ist $\kappa(G) = 0$.
  2. Fall, $\kappa_e(G) = 1$. Dann ist G zusammenhängend und hat eine Brücke $e = \{u, v\}$.
     Nach Lemma 7 ist entweder $G = K_2$ oder G hat einen Zerlegungsknoten (u oder v).
     In beiden Fällen ist $\kappa(G) = 1$.
  3. Fall, $k := \kappa_e(G) \geq 2$.
     Dann gibt es eine Kantenmenge $F := \{e_1, \ldots, e_k\}$, so dass $G - F$ unzusammenhängend ist, aber keine kleinere Kantenmenge dieses schafft.
     Entfernen wir nur $F' := \{e_1, \ldots, e_{k-1}\}$, so ist $G' := G - F'$ noch zusammenhängend.
     $e_k = \{u, v\}$ ist Brücke in G'.
     Für jedes i in $\{1, \ldots, k-1\}$ wähle einen Endknoten u_i von Kante e_i, so dass $u_i \notin \{u, u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_{k-1}\}$. Dieses ist möglich, da G schlicht ist.
     Sei $H := G - \{u_1, \ldots, u_{k-1}\}$. Wir unterscheiden zwei Fälle.
     1. Fall, H ist unzusammenhängend. Dann ist $\kappa(G) \leq k - 1 < k = \kappa_e(G)$.
     2. Fall, H ist zusammenhängend.
        H ist Untergraph von G' und $e_k = \{u, v\}$ ist Brücke in H.
        Nach Lemma 7 ist $H = K_2$ oder H hat einen Zerlegungsknoten (u oder v).
        Löscht man also einen weiteren Knoten in H, so erhält man K_1 oder einen unzusammenhängenden Graphen. Also ist $\kappa(G) \leq k = \kappa_e(G)$.

Literaturquellen

Literaturquellen

* J. Clark, D.A. Holton, **Graphentheorie**, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1994. (Kapitel 2&8, Seite 51-92 & 287-320)

Literaturquellen

* J. Clark, D.A. Holton, **Graphentheorie**, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1994. (Kapitel 2&8, Seite 51–92 & 287–320)
* D. Jungnickel: Graphen, **Netzwerke und Algorithmen**, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1994. (Kapitel 7&11, Seite 263–268 & 407–434)