Fachbereich Mathematik
Professor W. Stannat
H. Gündogan
A. Keller

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

26.01.2009

Mathematik III für BI, BSc. WI/BI, MaWi, AngGeo
12. Übung

Gruppenübung

G 35 Für ein $\theta > 0$ sei $X_1, X_2, \ldots$ eine unabhängige Folge identisch $R(0, \theta)$ - verteilter Zufallsvariablen.

a) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$T_n(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{2}{n} \cdot (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$$

ein erwartungstreuer Schätzer für $\tau(\theta) = \theta$ ist.

b) Bestimmen Sie die Varianz von T_n.

c) Zeigen Sie, dass $T_1, T_2, \ldots$ eine konsistente Schätzerfolge für $\tau(\theta) = \theta$ ist.

d) Sei

$$\widetilde{T}_n(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{4}{n^2} \cdot (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)^2$$

Zeigen Sie, dass $\widetilde{T}_n$ nicht erwartungstreu für $\tau(\theta) = \theta^2$ ist.

e) Modifizieren Sie $\widetilde{T}_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ geeignet, so dass sich ein erwartungstreuer Schätzer für $\tau(\theta) = \theta^2$ ergibt.

G 36 Der Teilnehmer eines Bundesliga-Tippspieles liegt in 20% aller Fälle mit seinen Tipps richtig. Im Rahmen eines Tippspieles haben die Teilnehmer erst dann eine Chance auf einen Anteil vom Jackpot, wenn sie mindestens 4 der 17 Heimspiele ihrer Heimmannschaft in der aktuellen Saison richtig vorhersagen. Sei X die Anzahl der von dem Tippspiel-Teilnehmer korrekt vorhergesagten Ergebnisse der Heimspiele seiner Mannschaft.

(a) Wie ist X verteilt?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Teilnehmer seine Chance auf einen Anteil am Jackpot wahrt? Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit exakt und näherungsweise. Was fällt Ihnen auf?

Es kann davon ausgegangen werden, dass der Teilnehmer seine Tipps für die einzelnen Spiele seiner Mannschaft unabhängig (d.h. in Ignoranz des bisherigen Saisonverlaufs) abgibt.

G 37 Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit unbekanntem Erwartungswert μ und bekannter Standardabweichung $\sigma = 0.2$. Es kann eine beliebig große Stichprobe von Realisierungen der Zufallsvariablen X genommen werden. Gesucht ist der Stichprobenumfang n damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% die Abweichung des arithmetischen Mittels der Stichprobe vom tatsächlichen Erwartungswert μ weniger als 0.1 beträgt.

a) Bestimmen Sie eine obere Schranke für n durch Anwendung der Tschebyscheffschen Ungleichung.

b) Bestimmen Sie n exakt.

Hausübung

H 35 In einem Labor wird eine Flüssigkeit maschinell in 40 Reagenzgläser gefüllt. Die Maschine ist auf einen Abfüllwert von 10 [ml] eingestellt. Aus Erfahrung weiß man, dass dabei eine Streuung von 0.5 [ml] auftritt. Nach einem weiteren Verarbeitungsschritt, welcher das Volumen der abgefüllten Menge nicht beeinflusst, werden die 40 Proben in ein Gefäß umgefüllt. Mit Y bezeichnen wir das Volumen der insgesamt abgefüllten Flüssigkeit.

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Y.

b) Berechnen Sie mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit, dass Y um mehr als 2 ml von $E(Y)$ abweicht.

H 36 Ein Produzent von hochwertigem Champagner weiß aus Erfahrung, dass aufgrund der technischen Besonderheiten beim Abfüllvorgang bei 3% aller abgefüllten Flaschen die Mindestfüllmenge nicht erreicht wird. Den Abnehmern einer 500Kiste gegenüber verpflichtet er sich zu einer Entschädigungszahlung für den Fall, dass bei mehr als einer bestimmten Anzahl K der Flaschen in einer Kiste diese Mindestfüllmenge nicht erreicht wird. Den Produzent interessiert die Frage, wie klein er diese Anzahl K äußerstenfalls festsetzen kann, wenn er aus Kostengründen auf lange Sicht höchstens bei 2.5% der Kisten eine Entschädigungszahlung zu leisten haben möchte.

Bestimmten Sie unter geeigneten Annahmen die kleinstmögliche Anzahl K, für welche die Wahrscheinlichkeit für das Fälligwerden einer Entschädigungszahlung bei einer bestimmten Kiste höchstens 2.5% beträgt.

H 37 Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilt mit der Dichte

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{12x(x-\sqrt{\theta})^2}{\theta^2} & \text{für } 0 \le x \le \sqrt{\theta} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\theta > 0$ ein unbekannter Parameter ist.

(a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X_1 in Abhängigkeit von θ.

(b) Zeigen Sie, dass durch

$$T_n(X_1, \ldots, X_n) = \frac{5}{2n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

ein erwartungstreuer Schätzer für $\tau(\theta) = \sqrt{\theta}$ gegeben ist.

(c) Ist die Schätzerfolge $T_1, T_2, \ldots$ konsistent für $\tau(\theta) = \sqrt{\theta}$?