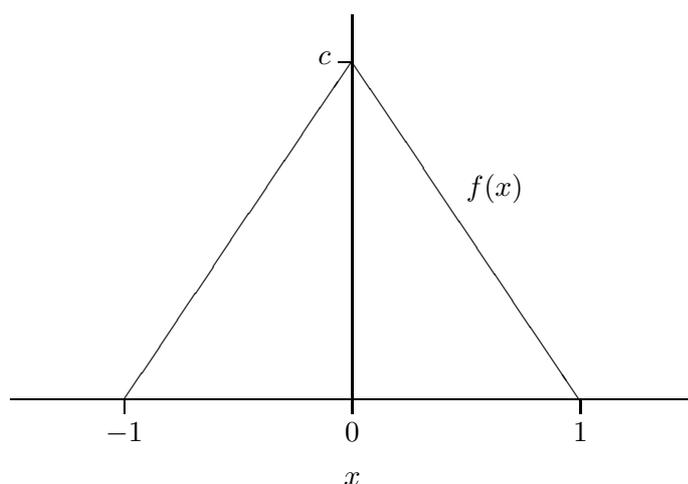




Mathematik III für BI, BSc. WI/BI, MaWi, AngGeo 11. Übung

Gruppenübung

G 32 Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit der Dichte f folgender Form:



- (a) Berechnen Sie die Konstante c .
- (b) Bestimmen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion F von X .
- (c) Berechnen Sie $P(X \leq -0.5)$, $P(0 \leq X \leq 0.5)$ und $P(X^2 \geq 0.25)$.
- (d) Geben Sie den Erwartungswert und die Varianz von X an.
- G 33** In einen Kronleuchter werden gleichzeitig 10 Glühbirnen eines bestimmten Typs eingeschraubt. Die Lebensdauer einer Glühbirne dieses Typs (in Stunden) lasse sich durch eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit $\lambda = 5 \cdot 10^{-4}$ angemessen beschreiben. Für die Lebensdauern der einzelnen Glühbirnen wird eine Unabhängigkeitsannahme getroffen.
- (a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine Glühbirne dieses Typs eine Lebensdauer von über 500 Stunden hat.
- (b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 8 der 10 Glühbirnen eine Lebensdauer von über 500 Stunden haben.
- (c) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Anzahl der Glühbirnen, die eine Lebensdauer von über 500 Stunden haben.
- G 34** Bei der Beladung eines LKW mit Kisten muss darauf geachtet werden, dass das Gewicht der Ladung höchstens 7.8 Tonnen beträgt. Die Gewichte [in kg] der einzelnen Kisten sollen durch identisch verteilte Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n beschrieben werden, für die folgende Dichte angenommen wird:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & \text{für } 105 \leq x \leq 135 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (a) Bestimmen Sie das Durchschnittsgewicht und die Varianz des Gewichts einer einzelnen Kiste.
- (b) Bestimmen Sie mittels der Ungleichung von Tschebyscheff eine Schranke für die Wahrscheinlichkeit, dass das Gesamtgewicht von $n = 64$ dieser Kisten zwischen 7.56 Tonnen und 7.8 Tonnen liegt.

Hausübung

H 32 Es sei X eine Zufallsgröße mit der Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = a + b \cdot \arctan(x) \quad -\infty < x < \infty.$$

- (a) Bestimmen Sie die Konstanten a und b .
- (b) Wie lautet die Dichtefunktion von X ?
- (c) Bestimmen Sie die Verteilungs- und Dichtefunktion von $Y = |X|$.

H 33 Eine Metallhobelmaschine stellt Platten her, deren Dichte X untersucht wird. Es kann angenommen werden, dass X normalverteilt ist mit den Parametern $\mu = 10 \text{ mm}$ und $\sigma = 0.02 \text{ mm}$. Wieviel Prozent Ausschuß würden Sie erhalten, wenn die Platten

- (a) mindestens 9.97 mm stark sein sollen
- (b) maximal 10.05 mm stark sein dürfen
- (c) um maximal $\pm 0.03 \text{ mm}$ vom Sollwert 10 mm abweichen dürfen?
- (d) Wie müssen Sie die Toleranzgrenzen $10 - c$ und $10 + c$ wählen, damit Sie nicht mehr als 5% Ausschuß erhalten?

H 34 Es sei X eine mit dem Parameter $\lambda = 3$ exponentialverteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(Y)$, die Varianz $Var(Y)$ und die Verteilungsfunktion $F_Y(y)$:

- (a) $Y = e^{-X}$
- (b) $Y = 2X$

Aufgaben, die Sie ohne Hilfsmittel lösen sollten

- Bestimmen Sie: $\frac{d}{dt} \sqrt{3t^4 + 2}$, $\frac{d}{dx} \ln(2x^3 + 4)$
- Bestimmen Sie: $\int \frac{6x^2}{x^3+2} dx$, $\int \frac{4t}{\sqrt{t^2+5}} dt$
- Sei $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ mit $\det(A) \neq 0$. Wir betrachten das DGL-System $\vec{y}' = A\vec{y}$. Sei FS das zugehörige Fundamentalsystem. Wieviele verschiedene Elemente besitzt FS (bis auf konstante Faktoren) und welche Eigenschaften besitzen diese?