



Mathematik III für BI, BSc. WI/BI, MaWi, AngGeo 7. Übung

Gruppenübung

G 19 Bestimmen Sie die Fourier-Reihe der 2π -periodischen Funktion

$$f(x) = |\sin x|, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

Hinweis: $\sin(x) \cos(nx) = \frac{1}{2}(\sin(x - nx) + \sin(x + nx))$

G 20 Berechnen Sie die Lösung der Wellengleichung

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x \in [0, \pi], \quad t \geq 0,$$

mit den Randbedingungen $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ für alle $t \geq 0$ und den Anfangsbedingungen

$$u(x, 0) = x^2 - \pi x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in [0, \pi].$$

Setzen Sie hierzu zunächst $u(x, 0)$ zu einer ungeraden Funktion auf $[-\pi, \pi]$ fort und bestimmen Sie $u(x, t)$ mit Hilfe der Fourier-Reihenentwicklung von $u(x, 0)$.

G 21 Gegeben sei die homogene Differentialgleichung 3. Ordnung

$$y''' - 6y'' + 2y' + 36y = 0.$$

- (a) Transformieren Sie die Differentialgleichung auf ein System von drei Differentialgleichungen erster Ordnung. Verwenden Sie hierzu den Ansatz

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}.$$

- (b) Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung des Systems, und geben Sie die allgemeine reelle Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung an.

Hausübung

H 19 Sei f eine 2π -periodische Funktion und gegeben durch

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \quad -\pi \leq x < \pi.$$

- (a) Skizzieren Sie diese Funktion und zeigen Sie, dass sie gerade ist.
(b) Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe FR der Funktion f .

Hinweis: $\int \sin(ax + c) \cos(bx) dx = \frac{b}{b^2 - a^2} \sin(ax + c) \sin(bx) + \frac{a}{b^2 - a^2} \cos(ax + c) \cos(bx)$

H 20 Eine Saite wird zwischen zwei Punkten mit Abstand π eingespannt und mit einem Hammer angeschlagen. Lösen Sie mittels des Produktansatzes und Fourier-Reihen das diesen Vorgang beschreibende Rand-Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= u_{xx}(x, t) \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) &= 0 & 0 \leq x \leq \pi \\ u_t(x, 0) &= v(x) & 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

Nehmen Sie dabei an, dass der Hammer auf Saitenabschnitt (a, b) , $0 < a < b < \pi$ einschlägt und dabei die Geschwindigkeitsverteilung

$$v(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq a \\ p, & a < x < b \\ 0, & b \leq x < \pi \end{cases}$$

erzeugt. Alle weiteren Einflüsse (Vorspannkraft, Saitendichte) werden vernachlässigt. **Hinweis:** Setzen Sie $u_t(x, 0)$ zu einer ungeraden Funktion fort.

H 21 Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) - y'(x) - 2y(x) = b(x)$$

mit

$$(i) \quad b(x) = -5 \cos(2x), \quad (ii) \quad b(x) = 3e^{-x}.$$

- (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung durch Angabe eines Fundamentalsystems.
- (b) Bestimmen Sie für (i) eine partikuläre Lösung durch den Ansatz vom Typ der Störfunktion und geben Sie die allgemeine Lösung an. Verfahren Sie analog für die Störfunktion (ii).