



## Mathematik III für BI, BSc. WI/BI, MaWi, AngGeo 6. Übung

### Gruppenübung

**G 16** Untersuchen Sie für welche Werte des Parameters  $r \in \mathbb{R}$  das Randwertproblem

$$4y'' + y = r \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right), \quad x \in [0, 2\pi]$$

mit den Randbedingungen

$$y(0) = 0 \quad \text{und} \quad y(2\pi) = 1$$

reelle Lösungen besitzt und geben Sie für diese  $r$  alle reellen Lösungen an.

**G 17** (a) Klassifizieren Sie die folgenden partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung:

Differentialgleichung	quasilinear	halblinear	linear
$u_{xy} - y \cdot u_x = x^2$			
$\sin(x) \cdot u_{xx} - u_x + 2 \cos(u_y) = 0$			
$e^{4y} \cdot u_{xx} + xy \cdot u_{xy} - u_x \cdot u_{yy} + 3u_x = 0$			
$u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} + 2u_x \cdot u_y = 0$			

(b) Welche der Differentialgleichungen aus dem Aufgabenteil (a) sind in der Form

$$a_{11}u_{xx} + a_{12}u_{xy} + a_{21}u_{yx} + a_{22}u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$$

mit Konstanten  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$  und  $a_{12} = a_{21}$  darstellbar?

Geben Sie in diesen Fällen die zugehörige Matrix  $A$  an und prüfen Sie, ob es sich um eine elliptische, hyperbolische oder parabolische Differentialgleichung handelt.

**G 18** Bestimmen Sie mit Hilfe eines Produktansatzes der Form  $u(x, t) = v(x) \cdot w(t)$  eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$x^2 \cdot u_{xt} + 3t^2 u = 0$$

die den Bedingungen  $u(1, 1) = 1/e$  und  $u(1, 0) = 1$  genügt.

### Hausübung

**H 16** Gegeben sei das folgende Randwertproblem:

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = x + 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 2 \tag{1}$$

- (i) Zeigen Sie, dass  $y_S(x) = x - 1$  eine spezielle Lösung von (1) ist.
- (ii) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die homogene Lösung von (1).
- (iii) Geben Sie die Gesamtlösung von (1) an.

**H 17** Es sei ein Balken der Länge  $l$  gegeben, der an beiden Enden getragen und mit einer konstanten Last belegt wird. Für kleine Durchbiegungen folgt für die Biegelinie  $y(x)$  die Differentialgleichung

$$y'' = -m.$$

Untersuchen Sie für die folgenden Fälle, ob keine, eine oder mehrere Lösungen des Randwertproblems existieren:

- (i) Die Enden des Balkens werden fest gestützt, also  $y(0) = y(l) = 0$ .
- (ii) Die Enden des Balkens werden fest eingespannt, aber in der Höhe verstellbar:  
 $y'(0) = 0, y'(l) = -lm$ .
- (iii) Wie in (ii), aber mit  $y'(0) = y'(l) = 0$ .
- (iv) Der Balken ist links gestützt ( $y(0) = 0$ ) und rechts eingespannt ( $y'(l) = 0$ ).

Geben Sie jeweils die Lösungen an.

**H 18** Bestimmen Sie mit Hilfe eines Produktansatzes der Form  $u(x, t) = v(x) \cdot w(t)$  eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$2t \cdot u_x - x^2 \cdot u_t = 0,$$

die den Bedingungen

$$u(0, 0) = 9 \quad \text{und} \quad u(0, 1) = 9e^2$$

genügt.