



Mathematik III für BI, BSc. WI/BI, MaWi, AngGeo 4. Übung

Gruppenübung

G 10 Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'' = -\frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y + 1, \quad y(2) = 0, \quad y'(2) = 0.$$

Berechnen Sie $y(2.6)$ näherungsweise mit dem Polygonzugverfahren (Differenzenverfahren) mit Schrittweite $h = 0.2$.

G 11 (a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$(t-1) \cdot \ddot{u} - t \cdot \dot{u} + u = 0, \quad u(0) = 1, \quad \dot{u}(0) = \sqrt{2}.$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass $u_1(t) = e^t$ eine Lösung ist und benutzen Sie dann den Produktansatz $u(t) = u_1(t) \cdot v(t)$ zur Bestimmung der allgemeinen Lösung der homogenen DGL.

(b) Bestimmen Sie in analogie zu (a) die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 2xy' - 2y = 0.$$

Verwenden Sie, dass $y_1(x) = e^{(x^2)}$ eine spezielle Lösung dieser Differentialgleichung ist.
Hinweis: Das letzte Integral lässt sich nicht explizit lösen und kann einfach als Integral angegeben werden.

G 12 Gegeben sei die inhomogene Differentialgleichung 3. Ordnung

$$L(y) = \frac{\ln(x)}{x} \quad (x > 0)$$

mit

$$L(y) := x^2 y''' - 2y'.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionen $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = x^3$ und $y_3(x) = \ln(x)$ ein Fundamentalsystem zu $L(y) = 0$ bilden.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Problems mit der Methode der Variation der Konstanten.

Hinweis: Es gilt $\int \frac{\ln(x)}{x^4} dx = -\frac{\ln(x)}{3x^3} - \frac{1}{9x^3}$.

Hausübung

H 10 Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x \cdot y'' - (x+1) \cdot y' + y = 0.$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung mit Hilfe der speziellen Lösung $y_1(x) = e^x$.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe von (a) die Lösung des AWP $y(1) = -1$, $y'(1) = 2$ annimmt.

H 11 Für $x > 0$ sei die Dgl.

$$x(x+1)y'' - (2x+1)y' + 2y = 2x(x+1)$$

gegeben. Überprüfen Sie, ob die Funktionen $y_1(x) = (x+1)^2$ und $y_2(x) = x^2$ ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung bilden. Berechnen Sie sodann die allgemeine Lösung durch Variation der Konstanten.

H 12 Gegeben sei die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' = e^y.$$

Berechnen Sie näherungsweise $y(0.5)$ mit Hilfe des im Skript angegebenen Differenzenverfahrens mit der Schrittweite $h = 0.25$ im Intervall $[0, 0.5]$. Geben Sie Ihre Näherungslösung bis auf 4 Nachkommastellen genau an.

In unregelmäßigen Abständen werden wir zusätzlich zu den Hausübungen Aufgaben zur Selbstkontrolle veröffentlichen. Diese sollten Sie ohne Hilfsmittel (d.h. auch ohne Taschenrechner!) und innerhalb kürzester Zeit lösen können. Die Aufgaben sollen NICHT abgegeben werden.

- Skizzieren Sie: e^{-x} , $\cos x$
- Bestimmen Sie: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $\sin \pi$, $\frac{d}{dx} \ln x$
- Konvergieren die folgenden Reihen? Wenn ja, geben Sie den Grenzwert an.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$$