



## Mathematik III für BI, BSc. WI/BI, MaWi, AngGeo 3. Übung

### Gruppenübung

**G 7** Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = 1 + x + y^3, \quad y(0) = 0.$$

Bestimmen Sie näherungsweise  $y(0.2)$  durch Anwendung des Euler-Verfahrens mit Schrittweite  $h = 0.1$ .

**G 8** Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 + (1 - x)y - 1, \quad y(0) = 1$$

für  $-1 < x < 1$  mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes.

- Berechnen Sie die Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_5$  der Potenzreihe.
- Leiten Sie aus (a) eine Vermutung bezüglich der Werte der Koeffizienten  $a_n$  für  $n \in \mathbb{N}_0$  ab. Wie lautet die Lösung, wenn Ihre Vermutung richtig ist? Machen Sie die Probe.

**Hinweis:** Für das Produkt zweier absolut konvergenter Reihen gilt

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left( \sum_{m=0}^{\infty} b_m \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n a_n b_m.$$

**G 9** (a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'' + y' = x + 2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$$

(b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 2y \cdot (y')^3 = 0$$

durch Angabe der Umkehrfunktion  $x(y)$ .

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'' = e^y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \sqrt{2}.$$

### Hausübung

**H 7** Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 + (1 - x)y - 1, \quad y(0) = 1$$

für  $-1 < x < 1$ . Runden Sie bei den folgenden Rechnungen sämtliche Zwischenergebnisse auf 3 Nachkommastellen.

- (a) Bestimmen Sie einen Näherungswert für  $y(0.3)$  durch Anwendung des Euler-Verfahrens mit Schrittweite  $h = 0.1$ .
- (b) Beurteilen Sie Ihren Näherungswerte aus (a) aufgrund eines Vergleichs mit dem exakten Wert (Vgl. Aufgabe G9).

**H 8** Bestimmen Sie mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes für die Lösung  $y(x)$  sowie der Potenzreihe für die Sinusfunktion die ersten sieben Glieder der Potenzreihe der Lösung  $y(x)$  des Anfangswertproblems

$$y' = \sin(x) \cdot y, \quad y(0) = 1.$$

Vergleichen Sie das so erhaltene Polynom  $P_5(x)$  5. Grades mit der exakten Lösung  $y(x)$  des Anfangswertproblems (Trennung der Veränderlichen!), indem Sie sowohl  $y(\frac{1}{2})$  als auch  $P_5(\frac{1}{2})$  berechnen.

**Hinweis:** Stellen Sie  $\sin(x)$  als Reihe dar.

**H 9** (a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$x \cdot y'' - y' + \frac{2}{x} = 0.$$

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y \cdot y'' + (y')^2 = 1, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

**Hinweis:** Für die DGL mit der Umkehrfunktion  $x(y)$  gilt  $x'' = f(y, x')$ . Substituieren Sie  $z = x'$  und lösen Sie die sich daraus ergebende Bernoulli-DGL.

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y^3 y'' + 1 = 0, \quad y(1) = y'(1) = 1.$$