Fachbereich Mathematik
Professor W. Stannat
H. Gündogan
A. Keller

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

20.10.2008

Mathematik III für BI, BSc. WI/BI, MaWi, AngGeo
1. Übung

Gruppenübung

G 1 Eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung der Gestalt $y' = f(x, y)$ schreibt für jeden Punkt (x, y) einer Lösungskurve $y(x)$ eine Steigung $f(x, y)$ vor. Eine Veranschaulichung der Differentialgleichung ist also durch eine Skizze des zugehörigen **Richtungsfeldes** möglich: Hierzu zeichnet man in einigen Punkten (x, y) ein kurzes Geradenstück (das als **Linienelement** bezeichnet wird) mit der Steigung $f(x, y)$. Eine Lösungskurve $y = y(x)$ muss so durch das Richtungsfeld laufen, dass das Linienelement in jedem Punkt $(x, y(x))$ tangential an die Kurve ist.
Für eine Zeichnung des Richtungsfeldes ist es günstig, wenn man sich für einige Werte $c \in \mathbb{R}$ überlegt, wo die Linienelemente mit Steigung c liegen. Diese sogenannten **Isoklinen** ("Kurven mit gleicher Steigung der Linienelemente") erhält man aus der Gleichung

$$f(x, y) = c.$$

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = 1 + x + y.$$

(a) Berechnen Sie die Isoklinen.

(b) Skizzieren Sie das Richtungsfeld durch Eintragen der Linienelemente in den Punkten (x, y) mit $x, y \in \{-3, -2, -1, 0, 1\}$. Zeichnen Sie einige Isoklinen und Lösungskurven ein.

(c) Bestimmen Sie anhand der Skizze diejenige Lösung, die die Anfangsbedingung $y(0) = -2$ erfüllt und prüfen Sie das Ergebnis durch eine Probe. Welche Besonderheit fällt an dieser Lösung auf?

G 2 Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = e^y, y(0) = 0$$

durch Trennung der Veränderlichen und überprüfen Sie Ihre Lösung anschließend.

G 3 Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'x + y = 1 + x, \quad x > 0, \quad y(1) = 2.$$

(a) Lösen Sie die homogene Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung des Anfangswertproblems.

Hausübung

H 1 Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = -\frac{(x+1)y}{x}, \qquad y(1) = 1.$$

H 2 Wir betrachten die DGL $y' + y \sin x = \sin^3 x$.

(a) Lösen Sie die zugehörige homogene DGL.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung obiger DGL (mit Variation der Konstanten).

Hinweis: $\int \sin^3 t e^{-\cos t} dt = (\sin^2 t - 2\cos t - 2)e^{-\cos t} + c,\ c \in \mathbb{R}$

H 3 Klassifizieren Sie die folgenden Differentialgleichungen nach den Kategorien *gewöhnlich, partiell, keines von beiden, linear* und *nichtlinear*, und bestimmen Sie die Ordnung.

1. $y''' + x^2 y' + 3y = 2e^x$
2. $y^3 + x^2 y' + 3y'' = 0$
3. $\cos(y) \cdot z_{xx} - x \cdot z_{yy} = 0$
4. $\cos(z_y) + z_x = 0$
5. $xy \cdot z_{xxx} + z_y = x \cdot e^{2x}$
6. $t \cdot \ddot{x}^2 + 2\dot{x} - 3x = t^2$
7. $y'(t+1) = y(t)$