Graphen und Algorithmen (WS 2007/2008)

Übungsblatt Nr. 9

13. Dezember 2007

Aufgabe 9.1

Mit $\omega(G)$ bezeichnen wir die Anzahl der Zusammenhangskomponenten eines Graphen G.
Sei G ein Graph und e eine Kante von G. Sei $G - e$ der Untergraph von G, der durch Entfernen von e aus G entsteht. Zeigen Sie: $\omega(G) \leq \omega(G - e) \leq \omega(G) + 1$.

Aufgabe 9.2

Ein Knoten v eines Graphen G heißt **Zerlegungsknoten** von G, wenn der Untergraph $G - v$, der durch Entfernen von v und aller mit v inzidenten Kanten aus G entsteht, mehr Zusammenhangskomponenten hat als G selbst (also: $\omega(G) < \omega(G - v)$).
Beweisen Sie, dass ein Knoten v eines zusammenhängenden Graphen genau dann ein Zerlegungsknoten von G ist, wenn es zwei von v verschiedene Knoten u und w ($u \neq w$) gibt, so dass v in jedem u-w-Weg in G enthalten ist.

Aufgabe 9.3

Sei G ein Graph mit mindestens zwei Knoten. Zeigen Sie, dass G dann mindestens zwei Knoten enthält, die keine Zerlegungsknoten sind.

Aufgabe 9.4

Sei G ein zusammenhängender Graph mit mindestens drei Knoten. Zeigen Sie: Wenn G eine Brücke[1] enthält, dann enthält G auch (mindestens) einen Zerlegungsknoten.

Aufgabe 9.5

Seien u und v zwei verschiedene Knoten des Graphen G. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:
a) Eine Knotenteilmenge $S \subseteq V \setminus \{u, v\}$ ist genau dann u-v-trennend, wenn jeder u-v-Weg mindestens einen inneren Knoten enthält, der S angehört.
b) Eine Kantenteilmenge F von G ist dann und nur dann u-v-trennend, wenn jeder u-v-Weg mindestens eine Kante enthält, die F angehört.

[1] vgl. Aufgabe 5.6