Graphen und Algorithmen (WS 2007/2008)

Übungsblatt Nr. 8

6. Dezember 2007

Aufgabe 8.1

Sei (D, u, s, t) ein Flussnetz mit ganzzahligen Kapazitäten $u(a) \in \mathbb{Z}$ für alle Bögen $a \in A$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Behauptungen.
a) Sind alle Kapazitäten gerade Zahlen, so existiert ein maximaler s-t-Fluss f, so dass $f(a)$ für alle Bögen $a \in A$ gerade ist.
b) Sind alle Kapazitäten ungerade Zahlen, so existiert ein maximaler s-t-Fluss f, so dass $f(a)$ für alle Bögen $a \in A$ ungerade ist.

Aufgabe 8.2

Es sei (D, u, s, t) ein Flussnetz mit ganzzahligen Kapazitäten $u(a) \in \mathbb{Z}_+$ für alle $a \in A(D)$. Sei f ein maximaler Fluss in diesem Netz. Wir nehmen an, dass die Kapazität eines einzelnen Bogens

1. um 1 erhöht wird,
2. um 1 verringert wird.

Geben Sie einen Algorithmus der Komplexität $\mathcal{O}(|A|)$ an, der einen maximalen Fluss in dem jeweiligen veränderten Netz bestimmt.

Aufgabe 8.3

Ein Astronautenteam der ESA soll im Rahmen einer Weltraummission einige Experimente für industrielle Auftraggeber im All durchführen. Wir betrachten im Folgenden das Problem der Experimentauswahl während der Vorbereitungsphase. Es gibt n verschiedene Experimente, welche unabhängig voneinander durchgeführt werden können. Aus diesen Experimenten sollen einige ausgewählt werden. Wenn Experiment i $(1 \leq i \leq n)$ durchgeführt wird, so bringt dieses der ESA einen Ertrag von c_i Euro. Zur Durchführung der Experimente werden bestimmte Werkzeuge benötigt. Ein Experiment i benötigt eine Teilmenge aus der Menge aller Werkzeuge. Ferner nehmen wir an, dass sich die Werkzeuge nicht durch ihren Gebrauch verschleißen, so dass mit jedem mitgenommenen Werkzeug alle vorgesehenen Experimente durchgeführt werden können. Die Mitnahme eines Werkzeugs j verursacht Kosten in Höhe von k_j Euro.
Geben Sie einen Algorithmus an, um zu bestimmen, welche Werkzeuge mitgenommen und welche Experimente damit durchgeführt werden sollen, so dass die Gewinn für die ESA (Gesamteinnahmen aus den Experimenten abzüglich der Kosten für die Mitnahme der Werkzeuge) maximal ist. Begründen Sie die Korrektheit Ihres Algorithmus.

Aufgabe 8.4

Wir betrachten die Fertigungsplanung für eine Menge J von Aufträgen, welche auf einer Menge M von gleichartigen, parallel arbeitenden Maschinen abgearbeitet werden. Jeder Auftrag $j \in J$ benötigt eine Anzahl p_j von Fertigungstagen auf einer der Maschinen. Für jeden Auftrag j ist ein Eingangstag $r_j \in \mathbb{Z}$ festgelegt, an dem der Auftrag zur Bearbeitung zur Verfügung steht. Ferner ist ein Liefertag $d_j \in \mathbb{Z}$ mit $d_j \geq r_j + p_j$ festgelegt, an dem der Auftrag spätestens erledigt sein muss. (Die Angabe eines Tages k bezieht sich in beiden Fällen auf den Beginn des k-ten Tages.) Wir nehmen an, dass eine Maschine nur einen Auftrag gleichzeitig erledigen kann und dass ein Auftrag zu einem gegebenen Zeitpunkt nur von höchstens einer Maschine bearbeitet werden kann. Es ist aber erlaubt, die Bearbeitung eines Auftrags zu unterbrechen und zu einem späteren Zeitpunkt auf der gleichen oder einer anderen Maschine fortzusetzen. Das Fertigungsplanungsproblem besteht nun darin, eine zulässige Zuordnung der Aufträge auf die Maschinen zu bestimmen, so dass alle Aufträge rechtzeitig fertig werden, oder andernfalls nachzuweisen, dass dieses nicht möglich ist. Geben Sie einen auf Max-Flow basierenden Algorithmus für dieses Problem an.

Beispieldatensatz: $M := \{1, 2, 3\}$ Maschinen, $J := \{1, 2, 3, 4\}$ Aufträge, Bearbeitungsdauern $p = (1.5, 1.25, 2.1, 3.6)$, Datum der Bereitstellung $r = (3, 1, 3, 5)$, Datum der spätesten Fertigstellung $d = (5, 4, 7, 9)$.

Lösungshinweis: Zerlegen Sie das Intervall zwischen dem frühesten Bereitstellungstag (Tag 1 im Beispiel) und dem spätestens Liefertag (hier: Tag 9) in innerlich disjunkte Teilintervalle, indem Sie sämtliche Bereitstellungs- und Liefertage dazwischen sortieren. Ordnen Sie die einzelnen Aufträge diesen Intervallen zu.

Aufgabe 8.5

Implementieren Sie den Algorithmus von Goldberg und Tarjan und vergleichen Sie dessen Laufzeit mit Ihren Implementierungen der Algorithmen-Varianten des Ford-Fulkerson-Verfahrens.