

Graphen und Algorithmen (WS 2007/2008)

Übungsblatt Nr. 6

22. November 2007

Aufgabe 6.1

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit mindestens 5 Knoten. Beweisen oder widerlegen Sie, dass G oder \overline{G} stets einen Kreis enthält.

Aufgabe 6.2

Sei $T = (V, E)$ ein Baum, in welchem kein Knoten Grad 2 hat. Zeigen Sie, dass für die Länge d eines längsten Pfades in T die Abschätzung $d \leq \frac{|V|}{2}$ gilt.

Aufgabe 6.3

a) Ein Bauer möchte mit einem kleinen Boot über einen Fluss setzen. Er hat einen Wolf, eine Ziege und einen Kohlkopf dabei. Alle vier müssen auf die andere Seite. Nur der Bauer kann das Boot steuern. Das Boot ist aber so klein, dass er nur jeweils einen der drei auf jeder Überfahrt mitnehmen kann. Das Problem dabei: Er kann den Wolf nicht mit der Ziege und die Ziege nicht mit dem Kohlkopf alleine lassen, sonst frisst der Wolf die Ziege, bzw. die Ziege den Kohl. Was soll der Bauer also machen, um den Fluss zu überqueren?

b) Drei Engländer verirren sich im afrikanischen Busch. Als sie schon denken, sie seien verloren, treffen sie auf drei Eingeborene: einen Häuptling und seine zwei Stammesbrüder. Mit dem Häuptling handeln sie aus, dass die drei Eingeborenen sie zur nächsten Siedlung führen. Bald wird jedoch klar, dass es sich um einen Kannibalenstamm handelt, und dass die drei eigentlich nur darauf warten, einmal in der Überzahl zu sein, um über die Engländer herzufallen. Die aber sind vorsichtig, und so geht alles gut, bis sie an einen Fluss kommen, den sie nicht durchschwimmen können. Sie finden zwar ein Ruderboot, aber in dem ist nur Platz für jeweils zwei Personen. Außer den drei Engländern kann nur der Häuptling rudern. Wie müssen die Engländer die Flussüberquerung gestalten, damit alle lebend auf der anderen Seite ankommen? Modellieren Sie diese Probleme als kürzeste-Wege-Probleme in geeigneten Graphen.

Aufgabe 6.4

Gegeben sei ein Digraph $D = (V, A, c)$ mit nicht-negativen Gewichten $c \geq 0$. Geben Sie einen effizienten Algorithmus an, der in D einen ungeraden Kreis K mit kleinstem Gewicht $c(K)$ bestimmt.

Aufgabe 6.5

Gegeben sei ein lineares Ungleichungssystem $Ax \leq b$ in den reellwertigen Variablen $x = (x_1, \dots, x_n)$ und konstanter rechter Seite $b = (b_1, \dots, b_m)$. Die Nebenbedingungsmatrix A habe nur Einträge in $\{-1, 0, 1\}$, wobei in jeder Zeile genau zwei von Null verschiedene Einträge stehen, von denen einer eine $+1$ und der andere eine -1 ist. Geben Sie einen effizienten Algorithmus an, um zu entscheiden, ob das System $Ax \leq b$ Lösungen hat.

Aufgabe 6.6

Implementieren Sie die folgenden Algorithmen:

1. dijkstra
2. mooreBellmanFord
3. floydWarshall

Wenden Sie die Algorithmen auf Instanzen an, die Sie mit Ihrem Verfahren aus Aufgabe 2.7 generiert haben. Stellen Sie die jeweilige Ausgabe der einzelnen Algorithmen grafisch dar. Untersuchen Sie das Laufzeitverhalten empirisch, und weisen Sie nach, dass es den theoretischen Aussagen über die Algorithmen entspricht.