

Graphen und Algorithmen (WS 2007/2008)

Übungsblatt Nr. 4

8. November 2007

Aufgabe 4.1

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit k Zusammenhangskomponenten. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- G ist ein Wald.
- Jeder induzierte Untergraph hat einen Knoten, dessen Grad höchstens 1 ist.
- Jeder zusammenhängende Untergraph ist ein induzierter Untergraph.
- $k = |V| - |E|$.

Aufgabe 4.2

Seien T, T' zwei aufspannende Bäume eines zusammenhängenden Graphen G und sei $e \in E(T) \setminus E(T')$.

- Zeigen Sie, dass es eine Kante $e' \in E(T') \setminus E(T)$ gibt, so dass $T' + e - e'$ ein aufspannender Baum von G ist.
- Zeigen Sie, dass es eine Kante $e' \in E(T') \setminus E(T)$ gibt, so dass sowohl $T' + e - e'$ als auch $T - e + e'$ ein aufspannender Baum von G ist.

Aufgabe 4.3

Wir betrachten das folgende Spiel auf einem Graphen G . Es gibt zwei Spieler, genannt Rot und Blau. Zu Spielbeginn sind alle Kanten des Graphen ungefärbt. Die beiden Spieler färben nun abwechselnd eine ungefärbte Kante des Graphen in ihrer jeweiligen Farbe ein. Das Spiel endet, wenn alle Kanten gefärbt sind. Blau gewinnt das Spiel, wenn es am Ende einen Spannbaum bestehend aus blauen Kanten gibt. Rot gewinnt, wenn dieses verhindert werden konnte. Wir nehmen an, dass Rot das Spiel beginnt.

- Spielen Sie das Spiel einige Male mit einem Mitspieler auf einem selbst erstellten Graphen.
- Zeigen Sie, dass Blau das Spiel gewinnen kann, wenn G zwei kantendisjunkte aufspannende Bäume enthält. Hinweis: Nutzen Sie die Aussage von Aufgabe 4.2a.
- Kann Rot das Spiel gewinnen, wenn G keine zwei kantendisjunkte Spannbäume enthält?

Aufgabe 4.4

Implementieren Sie mit Hilfe der Prüfer-Codierung einen Algorithmus zur Bestimmung eines zufälligen aufspannenden Baumes auf n zufällig gewählten Knoten in $[0, 1]^2$ (mit euklidischem Abstand), so dass jeder mögliche Baum die gleiche Wahrscheinlichkeit hat, gewählt zu werden. Bestimmen Sie empirisch die Verteilung der Gewichte der Spannbäume. Ändert sich diese Verteilung, wenn Sie die Verteilung der n Knoten in der Ebene variieren (z.B. gleichverteilt oder in Clustern)?