Graphen und Algorithmen (WS 2007/2008)

Übungsblatt Nr. 2

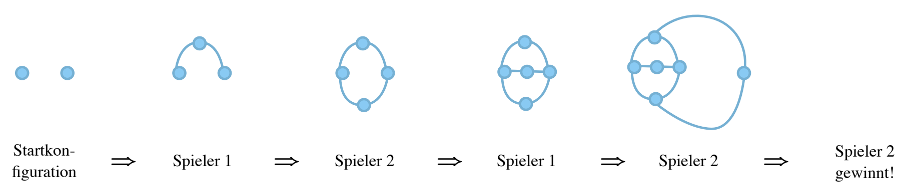
25. Oktober 2007

Aufgabe 2.0

Sei $D = (V, A)$ ein Digraph mit $|V| = n$ und $|A| = m$. Erklären Sie, warum die Kodierungslänge $[D]$ von D in Form einer Adjazenzliste gegeben ist durch $\lceil \log n \rceil + \lceil \log n \rceil \cdot m + \lceil \log m \rceil \cdot n$.

Aufgabe 2.1

Wir betrachten ein Spiel für zwei Personen. Zu Spielbeginn werden n Punkte auf ein Blatt Papier gezeichnet. (Das Spiel ist auch für kleine n interessant, z.B. $n = 5$.) Die beiden Spieler sind nun abwechseln dran, einen Zug zu machen. Der Spieler, der keinen Zug mehr ausführen kann, verliert. In jedem Zug verbindet ein Spieler zwei vorhandene Punkte mit einer Kante und zeichnet einen weiteren Punkt irgendwo auf diese neue Kante. Ein vorhandener Punkt darf dabei nur als Endpunkt für die Kante gewählt werden, wenn höchstens zwei weitere Kanten bislang dort enden. Die Kante darf sich nicht mit vorhandenen Kanten schneiden. (Oder, in der Sprache der Graphentheorie: Der Graph muss eben bleiben, der maximale Knotengrad ist 3. Der neue Punkt, der einer Kante hinzugefügt wird, hat bereits Grad 2.) Hier ein Beispiel:



a) Spielen Sie das Spiel für unterschiedliche Werte von n zunächst einige Male mit einem Mitspieler.
b) Zeigen Sie, dass ein Spiel mit n Startpunkten höchstens $3n - 1$ Züge dauert, unabhängig von der Strategie der Spieler.

Aufgabe 2.2

Wir definieren zunächst den **Komplementärgraphen** $\overline{G} := (\overline{V}, \overline{E})$ von $G := (V, E)$ durch $\overline{V} := V, \overline{E} := \{\{i, j\} : \{i, j\} \notin E\} = E(K_V) \backslash E(G)$. Hierbei bezeichnet K_V den vollständigen Graphen auf den Knoten V, d.h. $K_V = (V, \{\{i, j\} : i, j \in V, i \neq j\})$.
Sei G nun ein schlichter Graph mit mindestens 11 Knoten. Beweisen Sie: G und sein Komplement $\overline{G}$ können nicht beide planar sein.

Aufgabe 2.3

Verallgemeinern Sie die Formel von Euler für beliebige ebene Graphen (die nicht zusammenhängend sein müssen).

Aufgabe 2.4

Sei G ein planarer, nicht-zusammenhängender Graph mit n Knoten und e Kanten. Zeigen Sie, dass auch dann, wie im Fall eines zusammenhängenden Graphen, $e \leq 3n - 6$ gilt.

Aufgabe 2.5

Finden Sie ein effizientes Verfahren, um zu testen, ob ein gegebener Graph bipartit ist.

Aufgabe 2.6

Gegeben sei ein Digraph D, in dem jeder Knoten $v \in V(D)$ einen positiven Eingangsgrad $\deg_{in}(v) > 0$ habe. Zeigen Sie, dass es in diesem Digraphen einen gerichteten Kreis gibt.

Aufgabe 2.7

Implementieren Sie ein Verfahren, welches als Eingabe eine natürliche Zahl n erhält und als Ausgabe eine der folgenden, vom Benutzer zu wählenden Graphen liefert: a) einen zufälligen Graphen mit n Knoten und einer wählbaren Anzahl von Kanten, b) einen ebenen Graphen mit einer wählbaren Anzahl von Kanten, c) einen vollständigen Graphen auf n Knoten, d) einen bipartiten Graphen (wobei hierfür zusätzlich eine Zahl m einzulesen ist), e) einen vollständigen bipartiten Graphen. Ferner soll der Benutzer wählen können, ob der Graph zusammenhängend sein soll, oder es egal ist. Auch soll der Benutzer wählen können, ob es ein Graph oder Digraph ist. Der (Di-)Graph soll in eine Datei ausgegeben werden (Format z.B. wie auf Seite 21). Ferner soll der (Di-)Graph visualisiert werden (z.B. mit SVG, siehe Seite 22).

Aufgabe 2.8

Implementieren Sie die folgenden Algorithmen:

1. scanGraph (mit Tiefensuche)
2. scanGraph (mit Breitensuche)
3. bipartition (aus Aufgabe 2.5)

Wenden Sie die Algorithmen auf Instanzen an, die Sie mit Ihrem Verfahren aus Aufgabe 2.7 generiert haben. Stellen Sie die jeweilige Ausgabe der einzelnen Algorithmen ebenfalls grafisch dar. Untersuchen Sie das Laufzeitverhalten empirisch, und weisen Sie nach, dass es den theoretischen Aussagen über die Algorithmen entspricht.