Graphen und Algorithmen (WS 2007/2008)

Übungsblatt Nr. 13

24. Januar 2008

Aufgabe 13.1

Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Jeder Baum hat höchstens ein perfektes Matching.

Aufgabe 13.2

Wir betrachten das folgende Spiel auf einem Graphen G, bei dem zwei Spieler A und B abwechselnd Knoten auswählen. Spieler A startet und wählt einen beliebigen Knoten. In jedem weiteren Zug muss der nächste Spieler einen Knoten wählen, der adjazent zum vorher gewählten Knoten ist. Zusammen konstruieren die beiden Spieler also einen Pfad. Der Spieler, der den letzten Knoten wählen kann, gewinnt das Spiel.

Zeigen Sie, dass Spieler B stets gewinnen kann, wenn G ein perfektes Matching enthält, und A stets gewinnen kann, wenn G kein perfektes Matching enthält.

Aufgabe 13.3

Sei G ein Graph und M^* ein maximales Matching von G. Beweisen Sie, dass ein inklusionsmaximales Matching M von G mindestens $|M^*|/2$ Kanten enthält.

Aufgabe 13.4

Eine **Permutationsmatrix** ist eine Matrix mit Einträgen in $\{0, 1\}$, welche genau eine 1 in jeder Zeile und in jeder Spalte aufweist. Zeigen Sie, dass eine quadratische Matrix mit nicht-negativen ganzzahligen Einträgen genau dann als Summe von k Permutationsmatrizen geschrieben werden kann, wenn alle Zeilen- und Spaltensumme gleich k sind.

Aufgabe 13.5

Implementieren Sie den ungarischen Algorithmen und den Algorithmus von Kuhn-Munkres.