LÖSUNGEN AUFGABENBLATT NR. 10, Mathematik für „Joint Bachelor"

109./110./117. Alle vier Gleichungssysteme auf einmal (mit Gauß):

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & s & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c|c|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \end{array} \to \left(\begin{array}{ccccc|c|c|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\begin{array}{ccccc} \text{Aufgabe:} & & 109. & 110.\ a)\ b) & 117. \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccccc|c|c|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$\lightning$

110a hat keine Lösung (von $0=2$). Sonst:

z, s, t frei wählbar (nicht an Stufen), x, y zu berechnen!

Immer von unten nach oben:

Zu 109. $y=-s$, $x=-y-z-s-t= s-z-s-t=-z-t$:

$$\begin{pmatrix} x\\y\\z\\s\\t \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0\\-1\\0\\1\\0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix}$$

mit $z, s, t \in \mathbb{R}$.

Entsprechend 110b. $$\begin{pmatrix} x\\y\\z\\s\\t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0\\-1\\0\\1\\0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, \quad z, s, t \in \mathbb{R}.$$

Entsprechend 117. $$\begin{pmatrix} x\\y\\z\\s\\t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\\-1\\0\\0\\0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -1\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0\\-1\\0\\1\\0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, \quad z, s, t \in \mathbb{R}.$$

111. Probe für 110b. Zu testen: $A\begin{pmatrix} 1\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\\1\\0 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} -1\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 0\\-1\\0\\1\\0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} -1\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0 \end{pmatrix}$.

112. Jeweils drei „freie Variable" $\to$ Dimension Lösungsmenge jeweils gleich 3.

113. $\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & a\\ 2 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & a+2b\\ 0 & 2a+b \end{pmatrix}$.

114. Wenn in 113 $\begin{pmatrix} 3 & 0\\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ herauskommt, dann gilt $\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & a\\ 2 & b \end{pmatrix}$.

Das geschieht für $a+2b=0$, $2a+b=3$, also für $a=2$, $b=-1$. Also $\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2\\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

115. Gauß-Jordan-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \multicolumn{3}{c|}{\overbrace{\hphantom{0\ 1\ 1}}^{A}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\hphantom{1\ 0\ 0}}^{E}} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{E} \middle| \underbrace{\begin{array}{ccc} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}}_{A^{-1}}\right). \quad \text{Also: } A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

116. $A\underline{x} = \underline{b} \to \underline{x} = A^{-1}\underline{b} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix}$. $A\underline{x} = \underline{c} \to \underline{x} = A^{-1}\underline{c} = \begin{pmatrix} 3\\-2\\-1 \end{pmatrix}$.

118. (117. siehe oben!) Gauß: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 3 & 1 & 1 & b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & b-3 \end{array}\right) \to$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & -1 \\ 0 & 0 & 2a-4 & b-5 \end{array}\right).$$

a) Genau eine Lösung, falls $2a-4 \neq 0$, also für $a \neq 2$.

b) Unendlich viele Lösungen, falls $2a-4=0$ und $b-5=0$, also für $a=2$, $b=5$.

c) Keine Lösung, falls $2a-4=0$ und $b-5 \neq 0$, also für $a=2$, $b \neq 5$.

119. Wie 115, mit Gauß-Jordan: $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

120. $A\underline{x} = \underline{b} \to \underline{x} = A^{-1}\underline{b} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{pmatrix}$, $A\underline{x} = \underline{c} \to \underline{x} = A^{-1}\underline{c} = \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\-1 \end{pmatrix}$.