LÖSUNGEN AUFGABEN BLATT NR. 7, Mathematik für „Joint Bachelor"

73. $f'(x)=\frac{3x^2(x-1)-x^3\cdot 1}{(x-1)^2}=\underline{\underline{\frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}}}$, $f''(x)=\frac{(2x(2x-3)+x^2\cdot 2)(x-1)^2-x^2(2x-3)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}$

$=\underline{\underline{\frac{2x(x^2-3x+3)}{(x-1)^3}}}$.

74. $f'(x)=0 \rightarrow \underline{x_1=0}$, $\underline{x_2=\frac{3}{2}}$.
$f''(0)=0$ (siehe 75!), $f''(\frac{3}{2})>0$
$\rightarrow$ <u>rel. Minimum bei $\frac{3}{2}$</u>.

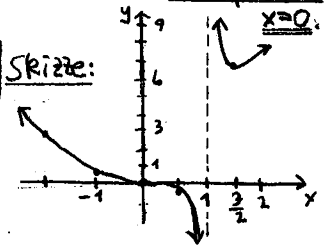
75. $f''(x)=0$ nur für $x=0$. $f(x)>0$ für $x<0$, $f(x)<0$ für $0<x<1 \rightarrow$ <u>Sattelpkt. bei $x=0$</u>.

76. $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} f(x)=\underline{\pm\infty}$. Außerdem: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\underline{+\infty}$.

<u>Wertetabelle:</u>

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	$\frac{8}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{27}{4}$	8

Skizze:



77. a) Wegen $2^{10}=1024$: $1024^{\frac{1}{10}}=\underline{\underline{2}}$. b) $(1024^{\frac{1}{10}})^{14}=2^{14}=1024\cdot 2^4=\underline{\underline{16384}}$.
c) $1024^{1,4}=1024^{\frac{14}{10}}=\underline{\underline{16384}}$ (wie b). d) $1024^{1,5}=2^{15}=\underline{\underline{32768}}$.

78. Wegen $\sqrt{2}=1{,}414\ldots$: $\underline{16384<1024^{\sqrt{2}}<32768}$, aber <u>viel näher bei 16384</u>.

79. $(x^{-\frac{5}{2}})'=\underline{\underline{-\frac{5}{2}x^{-\frac{7}{2}}}}$, $(\ln x^2)'=\frac{1}{x^2}\cdot 2x=\underline{\underline{\frac{2}{x}}}$, $(xe^x)'=1\cdot e^x+xe^x=\underline{\underline{(1+x)e^x}}$,

$(xe^x)''=\left[(1+x)e^x\right]'=(1+x)'e^x+(1+x)\cdot(e^x)'=e^x+(1+x)e^x=\underline{\underline{(2+x)e^x}}$.

80. a) $\varepsilon_V(x)=\frac{V'(x)}{V(x)}\cdot x=\frac{3x^2}{x^3}\cdot x=\underline{\underline{3}}$. b) x steigt um 1%: $\frac{\Delta x}{x}=0{,}01$. Also:
$\frac{\Delta V}{V}\approx\varepsilon_V(x)\cdot\frac{\Delta x}{x}=3\cdot 0{,}01=\underline{\underline{0{,}03}}$ (<u>Volumen steigt um ca. 3%</u>).

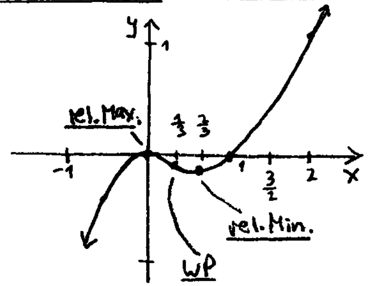
81. $f'(x)=(x^2(x-1))'=2x(x-1)+x^2\cdot 1=\underline{\underline{3x^2-2x}}$. $f''(x)=(3x^2-2x)'=\underline{\underline{6x-2}}$.
<u>Extremwerte</u>: $f'(x)=3x^2-2x=x(3x-2)=0\rightarrow \underline{x=0}$ und $\underline{x=\frac{2}{3}}$.
$f''(0)=-2\rightarrow$ <u>rel. Maximum bei $x=0$</u>, $f''(\frac{2}{3})=2\rightarrow$ <u>rel. Minimum bei $x=\frac{2}{3}$</u>.
<u>Wendepunkte:</u> $f''(x)=6x-2=0\rightarrow \underline{x=\frac{1}{3}}$. Muß bei Verlauf der Kurve <u>Wendepunkt</u> sein, siehe Skizze zu Aufgabe 82!

82. Zu einer „richtigen" Kurvendiskussion fehlt noch folgendes: <u>Definitionsbereich:</u> <u>$D=\mathbb{R}$</u>. <u>Symmetrieverhalten:</u> <u>weder gerade noch ungerade</u>, <u>Nullstellen:</u> <u>$x=0$</u> (doppelt), <u>$x=1$</u> (einfach),

<u>Wertetabelle:</u>

x	-1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$
$f(x)$	-2	0	$-\frac{2}{27}$	$-\frac{4}{27}$	0	$\frac{9}{8}$

<u>Außerdem:</u> $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$.



83. a) $\varepsilon_K(x)=\frac{K'(x)}{K(x)}\cdot x=\frac{1}{x+2}\cdot x=\underline{\underline{\frac{x}{x+2}}}$.
b) $\frac{\Delta K}{K}\approx\varepsilon_K(x)\cdot\frac{\Delta x}{x}=\frac{x}{x+2}\cdot 0{,}01\overset{x=5}{=}\underline{\frac{5}{7}\cdot 0{,}01}$ $(\hat{=}\ \underline{\underline{\frac{5}{7}\,\%}})$.
c) $\frac{\Delta K}{K}\approx\varepsilon_K(x)\cdot\frac{\Delta x}{x}=\frac{x}{x+2}\cdot 0{,}01\xrightarrow{x\text{ groß}}\underline{\underline{0{,}01}}$ $(\hat{=}\ \underline{\underline{1\%}})$.

84. Der Besucher muß $\underline{2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{63}}=2^{64}-1\approx 2^{64}$ <u>Reiskörner</u> beschaffen.
Wegen $2^{10}=1024\approx 10^3$ läßt sich dies Anzahl schreiben als $2^{64}=(2^{10})^6\cdot 16\approx(10^3)^6\cdot 16=\underline{10^{18}\cdot 16}$. Es gilt $10^{18}\cdot 16$ Reiskörner $\hat{=}\ 10^{16}\cdot 16\,g=10^{13}\cdot 16\,kg\ \hat{=}\ 10^{10}\cdot 32$ Kamele $\hat{=}\ 10^7\cdot 32$ Karawanen $\hat{=}\ 10^5\cdot 32$ Tagen $\hat{=}$ <u>knapp 10^4 Jahre</u>.
<u>Also müssen die Karawanen knapp 10000 Jahre laufen!</u>