LÖSUNGEN AUFGABENBLATT NR. 4, Mathematik für „Joint Bachelor"

37.–39.

Folge a_n =	erste Glieder	Monotonie	Beschränktheit	Limes
$(-1)^n + \frac{1}{n}$	$0, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{4}{5}$	—	nach oben und unten	—
$(-1)^n + n$	$0, 3, 2, 5, 4, 7$	—	nach unten	—
$\frac{n}{n+1}$	$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$	mon. stgd.	nach oben und unten	1
$\frac{1}{1+(-1)^n+n}$	$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}$	—	nach oben und unten	0

40. $a_n = \frac{n^3+1}{n^2+1} = \frac{n + 1/n^2}{1 + 1/n^2}$. Wäre die Folge konvergent, gälte:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim_{n\to\infty} n + \overbrace{\lim_{n\to\infty} 1/n^2}^{0}}{\underbrace{\lim_{n\to\infty} 1}_{1} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} 1/n^2}_{0}} = \lim_{n\to\infty} n \;\lightning.$$

41. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$.   42. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+3}}{3^k} = 8 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 8 \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 8 \cdot 3 = \underline{\underline{24}}$.

43. a) $a_1 = \underline{1}$ (steht da), $a_2 = 1 + \frac{a_1}{2} = \underline{\frac{3}{2}}$, $a_3 = 1 + \frac{a_2}{2} = \underline{\frac{7}{4}}$, $a_4 = 1 + \frac{a_3}{2} = \underline{\frac{15}{8}}$.

b) Vermutung: Konvergenz gegen 2?

44. a)

k	1	2	3	4	5	6	7
f_k	1	1	2	3	5	8	13

b) $f_1 = f_2 = 1$ und $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ (für $n \geq 1$).

45. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k+2}}{5^k} = 9 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^k = 9 \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \underline{\underline{\frac{45}{2}}}$.

46. Existierte $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{2^{k+3}}$, dann auch $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^k$. $\lightning$ zu $\frac{3}{2} > 1$.

47. $a_n = \frac{2^n + 4^n}{2^{n+1} + 4^{n+1}} = \frac{2^n/4^n + 4^n/4^n}{2^{n+1}/4^n + 4^{n+1}/4^n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}{2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 4} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{0+1}{0+4} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$.

48. a) Mit vollständiger Induktion über n: Folge (a_n) nach oben beschränkt mit $a_n \leq 2$. Induktionsbasis: Gilt für $a_1 = 1$. Induktionsschluß: Gelte $a_n \leq 2$. Zu zeigen $a_{n+1} \leq 2$. Stimmt wegen $a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{2} \leq 1 + \frac{2}{2} = 2$.

Damit jetzt die Monotonie: $a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{2} \geq \frac{a_n}{2} + \frac{a_n}{2} = a_n$, also $\underline{a_{n+1} \geq a_n}$.

b) Nach a) konvergiert die Folge. Werde $x := \lim_{n\to\infty} a_n$ gesetzt. Mit „$\lim_{n\to\infty}$" auf beide Seiten der Rekursion $a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{2}$: $x = 1 + \frac{x}{2}$. Diese Gleichung hat die Lösung $\underline{x = 2}$, also tatsächlich $\underline{\underline{\lim_{n\to\infty} a_n = 2}}$.