MATHEMATIK für „Joint Bachelor", Prof. Ihringer, Aufgabenblatt Nr. 6

61. Sei $f(x) = (x+1)(x-1)$. Berechne die Ableitung $f'(x)$
   a) mit der Produktregel,
   b) mit ausmultiplizieren, dann ableiten.

62. Berechne die Ableitungen von

$$x^3+x^2+x+1, \quad (x^2+1)(x^2-1), \quad \frac{x^2+1}{x^2-1}, \quad (x+1)\sqrt{x+1}.$$

63. Skizziere die Funktion $f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x<0, \\ -1+x & \text{für } 0 \le x < 1, \\ \sqrt{x-1} & \text{für } x \ge 1. \end{cases}$

64. An welchen Stellen ist diese Funktion
   a) Linksseitig stetig, rechtsseitig stetig, stetig,
   b) Linksseitig differenzierbar, rechtsseitig differenzierbar, differenzierbar?
   (Ein Teil dieser Begriffe kam in der Vorlesung nicht vor, ist aber vielleicht intuitiv klar!)

---

65. Fülle die Wertetabelle aus und skizziere den Funktionsgraphen.

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)=x^3$						

66. Bestimme für $f(x)=x^3$ die Umkehrfunktion $f^{-1}(y)$ und berechne die Ableitung von $f^{-1}(y)$ mit Hilfe der Ableitung $f'(x)$.

67. Kostenfunktion $K(x) = 1+x^2$. Berechne $\Delta K(x)$ für $x=100$, $\Delta x=1$:
   a) mit der Näherung $\Delta K(x) \approx K'(x)\Delta x$, b) präzise.

68. a) Skizziere die Funktionen $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{1}{x-1}$, $y=\frac{1}{x-1}+1$.
   b) Bestimme $\lim\limits_{x\to 1-0}\left(\frac{1}{x-1}+1\right)$ und $\lim\limits_{x\to 1+0}\left(\frac{1}{x-1}+1\right)$.
   (Man sagt, die Funktion $y=\frac{1}{x-1}+1$ hat bei $x=1$ einen Pol.)

H69. Skizziere die Kostenfunktion $K(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{für } 0 \le x < 2, \\ -1+x & \text{für } 2 \le x < 4, \\ x & \text{für } x \ge 4 \end{cases}$

H70. Wo ist der größte Kostensprung dieser Funktion? Wo ist die Funktion (Linksseitig, rechtsseitig, beidseitig) stetig, wo (Linksseitig, rechtsseitig, beidseitig) differenzierbar?

H71. Neuer Einkommensteuertarif, $E(x) := \begin{cases} \frac{x+30\,000}{300\,000}\cdot x & 0 \le x \le 90 \\ 0{,}4\cdot x & x \ge 900 \end{cases}$

Berechne $\Delta E(x)$ für $x=10000$ und $\Delta x = 1$
a) mit der Näherung $\Delta E(x) \approx E'(x)\Delta x$, b) präzise.

*H72. Derselbe Einkommensteuertarif $E(x)$.
a) Interpretiere $\frac{E(x)}{x}$, b) interpretiere $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{E(x)}{x}$.