MATHEMATIK für „Joint Bachelor", Prof. Inringer, Aufgabenblatt Nr. 4

In den Aufgaben 37–39 werden diese Zahlenfolgen (a_n) betrachtet:

$$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}, \qquad a_n = (-1)^n + n, \qquad a_n = \frac{n}{n+1}, \qquad a_n = \frac{1}{1+(-1)^n + n}$$

37. Berechne die ersten Glieder jeder dieser vier Folgen.

38. Welche dieser Folgen sind monoton steigend bzw. monoton fallend, welche sind nach oben bzw. nach unten beschränkt?

39. Welche dieser Folgen sind konvergent? Bestimme ggfs. die Grenzwerte.

40. Zeige, daß die Folge $a_n = \frac{n^3+1}{n^2+1}$ nicht konvergent ist.

---

41. Berechne $\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$.

42. Berechne $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+3}}{3^k}$.

43. Werde folgende rekursiv definiert Folge betrachtet:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{a_n}{2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

(„Rekursiv" heißt: erst a_1, dann a_2, dann a_3, usw.!)

a) Berechne a_1, a_2, a_3, a_4.

b) Stelle eine Vermutung über Konvergenz und Grenzwert auf.

44. Kaninchen-Vermehrung (nach Fibonacci, 13. Jahrhundert). Zu Beginn lebt ein Kaninchenpaar. Die Vermehrung folgt diesen Regeln:

(i) Jedes Paar ist ab dem zweiten Lebensmonat geschlechtsreif.

(ii) Ab den dann folgenden Monat bringt jedes Paar monatlich ein weiteres Paar zur Welt.

(iii) Alle Kaninchen leben ewig (und monogam!).

Also: In Monat 1 gibt es $f_1 = 1$ Paar, in Monat 2 gibt es immer noch $f_2 = 1$ Paar, in Monat 3 dann $f_3 = 2$ Paare, usw.

a) Berechne einige weitere Werte f_n dieser Fibonacci-Folge.

b) Finde eine rekursive Formel für die f_n's.

H45. Berechne $\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k+2}}{5^k}$.

H46. Zeige: der Grenzwert $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{2^{k+3}}$ existiert nicht.

H47. Berechne den Grenzwert der Folge $a_n = \frac{2^n + 4^n}{2^{n+1} + 4^{n+1}}$.

*H48. Es wird die rekursiv definiert Folge aus Aufgabe 43 weiteruntersucht.

a) Begründe, daß die Folge monoton steigend und nach oben beschränkt ist. (Dann weiß man, daß sie konvergiert!)

b) Löse jetzt die Gleichung

$$x = 1 + \frac{x}{2}.$$

Was hat die Lösung $x = a$ dieser Gleichung mit der untersuchten Folge zu tun?