Aufgabe 13. Erläutern Sie, wie Sie mit Hilfe der Formeln von Black-Scholes für europäische Call- und Put-Optionen auch Optionen vom Typ *Bull-Spread* bzw. *Bear-Spread* bewerten können (vgl. Aufgabe 1).

Lösung: Gemäß Aufgabe 1 lassen sich Optionen vom Typ *Bull-Spread* bzw. *Bear-Spread* als Linearkombination von Put- und Call-Optionen darstellen.
Z.B. entspricht einem Bull-Spread mit Parametern $K_1 < K_2$ bezüglich der Auszahlung der gleichzeitige Besitz

- eines Europäischem Calls mit Ausübungspreis K_1,
- der short position in einem Europäischem Call mit Ausübungspreis K_2.

Die Preise der dabei auftretenden Put- und Call-Optionen können mit Hilfe der Formeln von Black-Scholes für europäische Call- und Put-Optionen berechnet werden. Der gesuchte Preis ergibt sich dann als entprechende Linearkombination.
Z.B. ergibt sich der Preis eines Bull-Spread mit Parametern $K_1 < K_2$ als Differenz des Preises eines europäischem Calls mit Ausübungspreis K_1 und eines europäischem Calls mit Ausübungspreis K_2.

Aufgabe 14. Betrachtet wird eine europäische Call-Option mit Ausübungspreis 210 und Laufzeit 0.5 (Jahre) auf eine Aktie mit Startwert 230 und geschätzter Volatilität $\sigma = 0.25$. Der Zinssatz des Bonds sei $r = 0.04545$.

a) Berechnen Sie den Wert des Calls mit Hilfe der Formel von Black-Scholes.

Lösung: Gemäß der Formel von Black-Scholes ist der gesuchte Preis gegeben durch

$$C_E(0) = s_0 \cdot \Phi(d_1) - K \cdot e^{-r \cdot T} \cdot \Phi(d_2),$$

wobei $s_0 = 230$, $K = 210$, $r = 0.04545$, $T = 0.5$. $\sigma = 0.25$ und

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(s_0/K) + (r + 0.5 \cdot \sigma^2) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}} \\ &= \frac{\ln(230/210) + (0.04545 + 0.5 \cdot 0.25^2) \cdot 0.5}{0.25 \cdot \sqrt{0.5}} \approx 0.73155 \\ d_2 &= \frac{\ln(s_0/K) + (r - 0.5 \cdot \sigma^2) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}} \\ &= \frac{\ln(230/210) + (0.04545 - 0.5 \cdot 0.25^2) \cdot 0.5}{0.25 \cdot \sqrt{0.5}} \approx 0.55478 \end{aligned}$$

Für die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung gilt $\phi(d_1) = \phi(0.73155) \approx 0.77$ und $\phi(d_2) = \phi(0.55478) \approx 0.71$. Damit erhält man:

$$C_E(0) = 230 \cdot 0.77 - 210 \cdot e^{-0.04545 \cdot 0.5} \cdot 0.71 \approx 31.35$$

b) Approximieren Sie den Optionspreis durch approximative Berechnung des Preises der Option mit Hilfe eines Binomialbaumes mit $n = 5$ Zeitschritten.

Lösung: Da wir $n = 5$ Zeitschritte machen, ist $\triangle\, t = T/n = 0.5/5 = 0.1$ Wie in der Vorlesung wählen wir unseren Binomialbaum mit Parametern $q = 0.5$ (d.h. Kurs S geht jeweils mit Wahrscheinlichkeit 0.5 zu $u \cdot S$ bzw. $d \cdot S$) und

$$\begin{aligned} u &= e^{(r-0.5\cdot\sigma^2)\cdot\Delta t+\sigma\cdot\sqrt{\Delta t}} = e^{(0.04545-0.5\cdot0.25^2)\cdot0.1+0.25\cdot\sqrt{0.1}} \approx 1.083804, \\ d &= e^{(r-0.5\cdot\sigma^2)\cdot\Delta t-\sigma\cdot\sqrt{\Delta t}} = e^{(0.04545-0.5\cdot0.25^2)\cdot0.1-0.25\cdot\sqrt{0.1}} \approx 0.9253003 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die in den 5 Zeitschritten auftretenden Kurse:

$t_0 = 0$	$t_1 = 0.1$	$t_2 = 0.2$	$t_3 = 0.3$	$t_4 = 0.4$	$t_5 = 0.5$
					$u^5 \cdot S$
				$u^4 \cdot S \approx 317.34$	≈ 343.94
			$u^3 \cdot S \approx 292.81$		$u^4 \cdot d \cdot S$
		$u^2 \cdot S \approx 270.17$		$u^3 \cdot d \cdot S \approx 270.93$	≈ 293.64
	$u \cdot S \approx 249.27$		$u^2 \cdot d \cdot S \approx 249.98$		$u^3 \cdot d^2 \cdot S$
$S = 230$		$u \cdot d \cdot S \approx 230.65$		$u^2 \cdot d^2 \cdot S \approx 231.31$	≈ 250.69
	$d \cdot S \approx 212.82$		$u \cdot d^2 \cdot S \approx 213.42$		$u^2 \cdot d^3 \cdot S$
		$d^2 \cdot S \approx 196.92$		$u \cdot d^3 \cdot S \approx 197.48$	≈ 214.03
			$d^3 \cdot S \approx 182.21$		$u \cdot d^4 \cdot S$
				$d^4 \cdot S \approx 168.60$	≈ 182.73
					$d^5 \cdot S$
					≈ 156.06

Berechnen wir nun rückwärts die erwartete Auszahlung der Option, so erhalten wir (von rechts nach links sukzessive, in der letzten Spalte zunächst Positivanteil von Kurswert minus $K = 210$):

$t_0 = 0$	$t_1 = 0.1$	$t_2 = 0.2$	$t_3 = 0.3$	$t_4 = 0.4$	$t_5 = 0.5$
					133.94
				108.79	
			85.48		83.64
		63.86		62.17	
	45.54		42.23		40.69
31.23		27.21		22.36	
	16.91		12.19		4.03
		6.6		2.02	
			1.01		0
				0	
					0

Damit ergibt sich der Optionspreis als abgezinster Wert des Eintrages in der ersten Spalte:

$$C_E(0) \approx e^{-r \cdot T} \cdot 31.23 \approx 30.52$$