Aufgabe 11. Zeigen Sie die Itô-Formel für zeitabhängige Funktionen:

Sei W_t eindimensionale Brownsche Bewegung, sei X_t reellwertiger Itô-Prozess mit

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s \text{ und sei}$$

$f : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und auf $[0,T) \times (0,\infty)$ zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt für alle $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} f(t, X_t) = f(0, X_0) \quad &+ \quad \int_0^t \tfrac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) ds \ + \ \int_0^t \tfrac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) dX_s \\ &+ \tfrac{1}{2} \int_0^t \tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) d < X >_s \end{aligned}$$

Lösung: Wir gehen analog zum Beweis von Satz 11 vor. Dabei betrachten wir in 2)

$$\begin{aligned} & f(t_i, X_{t_i}) - f(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}) \\ &= [f(t_i, X_{t_i}) - f(t_{i-1}, X_{t_i})] + [f(t_{i-1}, X_{t_i}) - f(t_{i-1}, X_{t_{i-1}})] \\ &= \tfrac{\partial f}{\partial t}(\tau_i, X_{t_i}) \cdot (t_i - t_{i-1}) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}) \cdot (X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) \\ &\quad + \tfrac{1}{2} \tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}} + \Theta_i (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})) \cdot (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 \end{aligned}$$

mit $t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$.
Analog zum Beweis von Satz 2 folgt

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}) \cdot (X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) \to \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) dX_s \quad (n \to \infty) \quad f.s.$$

und

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}} + \Theta_i (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})) \cdot (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 \to \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) d < X >_s \quad (n \to \infty) \quad f.s.$$

daher genügt es zu zeigen:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial t}(\tau_i, X_{t_i}) \cdot (t_i - t_{i-1}) \to \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) ds \quad (n \to \infty) \quad f.s.$$

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $\frac{\partial f}{\partial t}$ (gilt nach Annahme an Differenzierbarkeit von f und Beschränktheit des auftretenden Definitionsbereiches) haben wir

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial t}(\tau_i, X_{t_i}) \cdot (t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial t}(t_i, X_{t_i}) \cdot (t_i - t_{i-1}) \to 0 \quad (n \to \infty) \quad f.s.,$$

und mit der gleichen Begründung ist $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)$ f.s. Riemann-integrierbar, was

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial t}(t_i, X_{t_i}) \cdot (t_i - t_{i-1}) \to \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) ds \quad (n \to \infty) \quad f.s.$$

impliziert. Aus beiden Schritten zusammen folgt die Behauptung.

Aufgabe 12. Zeigen Sie: Die Funktion

$$u(\tau, x) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\tau}} \cdot \exp\left(\frac{-(x-s)^2}{4\tau}\right) ds$$

ist Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$u_\tau = u_{xx}.$$

Lösung: Wir verwenden ohne Beweis, dass der Ableitungsoperator und das Integral vertauscht werden dürfen. In diesem Falle genügt es aber zu zeigen: Für die Funktion

$$f(\tau, x, s) = u_0(s) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\tau}} \cdot \exp\left(\frac{-(x-s)^2}{4\tau}\right)$$

gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Ableiten ergibt:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = u_0(s) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \exp\left(\frac{-(x-s)^2}{4\tau}\right) \left(-\frac{1}{2} \cdot \tau^{-3/2} + \frac{1}{\sqrt{\tau}} \cdot (-1) \cdot (x-s)^2 \cdot \frac{-1}{4\tau^2}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = u_0(s) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\tau}} \cdot \exp\left(\frac{-(x-s)^2}{4\tau}\right) \cdot \frac{(-2) \cdot (x-s)}{4\tau}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= u_0(s) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\tau}} \cdot \exp\left(\frac{-(x-s)^2}{4\tau}\right) \cdot \left(\frac{(-2) \cdot (x-s)}{4\tau} \cdot \frac{(-2) \cdot (x-s)}{4\tau} - \frac{1}{2\tau}\right) \\ &= u_0(s) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\tau}} \cdot \exp\left(\frac{-(x-s)^2}{4\tau}\right) \cdot \left(\frac{(x-s)^2}{4\tau^2} - \frac{1}{2\tau}\right). \end{aligned}$$

Dies impliziert die Behauptung.