**Aufgabe 9.** Zeigen Sie:

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X\colon (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$ eine integrierbare ZV und $Y\colon (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\Omega', \mathcal{A}')$ eine ZV. Dann ex. Abb. $g\colon (\Omega', \mathcal{A}') \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mit $E(X \mid Y) = g \circ Y$. Die Abbildung $g$ ist eindeutig bis auf die Äquivalenz "$= P_Y$-f.ü. "

**Bemerkung:** Die Abbildung $g$ ist die sog. **Faktorisierung der bedingten Erwartung** mit Schreibweise

$$g(y) = E(X|Y = y).$$

**Lösung zu Aufgabe 9:**

a) **Existenz**

Setze $Z = E(X|Y)$. Dann ist $Z$ eine Abbildung $Z : (\Omega, \mathcal{F}(Y)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, d. h. $Z$ ist $\mathcal{F}(Y) - \mathcal{B}$-messbar.

**Fall 1:** $Z = \chi_A$

Wegen $Z$ $\mathcal{F}(Y) - \mathcal{B}$-messbar gilt $A \in \mathcal{F}(Y) = Y^{-1}(\mathcal{A}')$.
Also existiert $A' \in \mathcal{A}'$ mit $A = Y^{-1}(A')$ und es gilt für $\omega \in \Omega$:

$$Z(\omega) = \chi_{Y^{-1}(A')}(\omega) = \chi_{A'}(Y(\omega)) = (g \circ Y)(\omega)$$

mit $g = \chi_{A'}$.

**Fall 2:** $Z$ nichtnegativ einfach.

Dann gilt

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \chi_{Y^{-1}(A_i')}$$

und – analog zu Fall 1 – folgt die Behauptung mit

$$g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \chi_{A_i'}$$

.

**Fall 3:** $Z$ nichtnegativ messbar.

Dann existieren nichtnegative einfache $\mathcal{F}(Y) - \mathcal{B}$-messbare (!) Zufallsvariablen $Z_n$ mit $Z_n \uparrow Z$. Nach Fall 2 gilt $Z_n = g_n \circ Y$ mit $g_n$ nichtnegativ einfach. Setze

$$g^* = \sup_n g_n \text{ und } g = g^* \cdot \chi_{[g^* < \infty]}.$$

Dann gilt wegen $Z < \infty$.

$$Z = \sup_n Z_n = \sup_n (g_n \circ Y) = (\sup_n g_n) \circ Y = g \circ Y.$$

**Fall 4:** $Z$ messbar

Dann gilt $Z = Z^+ - Z^-$ für nichtnegative $\mathcal{F}(Y) - \mathcal{B}$-messbare ZVen $Z^+$ und $Z^-$. Nach Fall 3 gilt

$$Z^+ = g^+ \circ Y \text{ und } Z^- = g^- \circ Y$$

und daher

$$Z = (g^+ - g^-) \circ Y$$

$\rightsquigarrow$ Existenz.

b) **Eindeutigkeit**

Aus

$$E(X|Y) = g_1 \circ Y = g_2 \circ Y \quad f.s.$$

folgt für alle $C \in \mathcal{F}(Y) = Y^{-1}(\mathcal{A}')$:

$$\int_C g_1 \circ Y \, dP = \int_C X \, dP = \int_C g_2 \circ Y \, dP.$$

Also gilt für alle $A' \in \mathcal{A}'$:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{Y^{-1}(A')} g_1 \circ Y \, dP - \int_{Y^{-1}(A')} g_2 \circ Y \, dP \\
&= \int_{Y^{-1}(A')} (g_1 - g_2) \circ Y \, dP \\
&= \int_{A'} (g_1 - g_2) \, dP_Y \\
&\quad \text{(nach dem Transformationssatz),}
\end{aligned}$$

woraus $g_1 - g_2 = 0$ $P_Y-$ f.ü., also $g_1 = g_2$ $P_Y$-f.ü., folgt. $\square$

**Aufgabe 10.** Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X \colon (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$ eine integrierbare ZV und $Y \colon (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\Omega', \mathcal{A}')$ eine ZV.

Begründen Sie:

a) $X = c$ f.s. $\Longrightarrow E(X \mid Y = \cdot) = c \;\; P_Y$-f.ü.

b) $X \geq 0$ f.s. $\Longrightarrow E(X \mid Y = \cdot) \geq 0 \;\; P_Y$-f.ü.

c) $E(\alpha X_1 + \beta X_2 \mid Y = \cdot) = \alpha E(X_1 \mid Y = \cdot) + \beta E(X_2 \mid Y = \cdot) \;\; P_Y$-f.ü.

d) $X_1 \leq X_2$ f.s. $\Longrightarrow E(X_1 \mid Y = \cdot) \leq E(X_2 \mid Y = \cdot) \;\; P_Y$-f.ü.

**Lösung zu Aufgabe 10:**

a) Aus $X = c$ f.s. folgt mit Satz 7 b) auch $E(X \mid Y) = c$ f.s. Damit gilt für $g(\cdot) = E(X \mid Y = \cdot)$:

$$g \circ Y = c \quad f.s.,$$

d.h.

$$1 = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega \, : \, g(Y(\omega)) = c\}) = \mathbf{P}_Y(\{\omega' \in \Omega' \, : \, g(\omega') = c\})$$

(wobei die letzte Gleichheit nach Definition von $\mathbf{P}_Y$ gilt), was $g = c$ $P_Y$-f.ü. impliziert.

b) Aus $X \geq 0$ f.s. folgt mit Satz 7 c) auch $E(X \mid Y) \geq 0$ f.s. Damit gilt für $g(\cdot) = E(X \mid Y = \cdot)$:

$$g \circ Y \geq 0 \quad f.s.,$$

d.h.

$$1 = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega \, : \, g(Y(\omega)) \geq 0\}) = \mathbf{P}_Y(\{\omega' \in \Omega' \, : \, g(\omega') \geq 0\})$$

(wobei die letzte Gleichheit nach Definition von $\mathbf{P}_Y$ gilt), was $g \geq 0$ $P_Y$-f.ü. impliziert.

c) Sei $g_1 = E(X_1 \mid Y = \cdot)$ und $g_2 = E(X_2 \mid Y = \cdot)$. Nach Definition und Satz 7 d) gilt dann

$$(\alpha \cdot g_1 + \beta \cdot g_2) \circ Y = \alpha \cdot g_1(Y) + \beta \cdot g_2(Y) = \alpha \cdot E(X_1 \mid Y) + \beta \cdot E(X_2 \mid Y) = E(\alpha \cdot X_1 + \beta \cdot X_2 \mid Y)$$

$f.s.$, was wegen der in Aufgabe 9 gezeigten Eindeutigkeit von $E(X \mid Y)$ die Behauptung impliziert.

d) Aus $X_1 \leq X_2$ f.s. folgt $X_2 - X_1 \geq 0$ f.s. Mit c) und b) folgt

$$E(X_2 \mid Y = \cdot) - E(X_1 \mid Y = \cdot) = E(X_2 - X_1 \mid Y = \cdot) \geq 0 \;\; P_Y - \text{f.ü.},$$

was die Behauptung impliziert. $\square$