Aufgabe 7. Wie in der Vorlesung wird im Folgenden ein Finanzmarkt im Ein-Perioden-Modell betrachtet, an dem es eine festverzinsliche Anlage und eine Aktie gibt. Die festverzinsliche Anlage wird mit Zinssatz $\rho > 0$ verzinst. Die Aktie hat zur Zeit $t = 0$ den Kurs $A_0 \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ sowie zur Zeit $t = 1$ den Kurs

$$A_1 = \begin{cases} u \cdot A_0 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p, \\ d \cdot A_0 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1-p, \end{cases}$$

wobei $p \in (0,1)$ und $0 < d < u$. Es gelte

$$d < 1 + \rho < u,$$

so dass der Finanzmarkt nach Vorlesung arbitragefrei und vollständig ist. Sei C ein beliebiger Claim.

a) Zeigen Sie: Der faire Preis von C hängt nicht von p ab.
b) Interpretieren Sie ihr Resultat aus a) anschaulich.

Lösung:

a) Nach Vorlesung gilt:
$x = (x_1, x_2)^T$ ist genau dann ein Hedge für C, wenn $x = (x_1, x_2)^T$ Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 \cdot (1+\rho) + x_2 \cdot u \cdot A_0 &= C(\omega_1) \\ x_1 \cdot (1+\rho) + x_2 \cdot d \cdot A_0 &= C(\omega_2) \end{aligned}$$

ist.
Die Determinante dieses LGS ist

$$(1+\rho) \cdot d \cdot A_0 - (1+\rho) \cdot u \cdot A_0 = (1+\rho) \cdot A_0 \cdot (d-u) \neq 0,$$

womit das LGS für jeden Claim eindeutig lösbar ist.
Nach der Cramerschen Regel erhält man die Lösung dieses LGS als:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{C(\omega_1) \cdot d \cdot A_0 - C(\omega_2) \cdot u \cdot A_0}{(1+\rho) \cdot A_0 \cdot (d-u)} = \frac{C(\omega_1) \cdot d - C(\omega_2) \cdot u}{(1+\rho) \cdot (d-u)}, \\ x_2 &= \frac{(1+\rho) \cdot C(\omega_2) - (1+\rho) \cdot C(\omega_1)}{(1+\rho) \cdot A_0 \cdot (d-u)} = \frac{C(\omega_2) - C(\omega_1)}{A_0 \cdot (d-u)}, \end{aligned}$$

so dass der faire Preis des Claims gegeben ist durch

$$\begin{aligned} x^T S_0 &= x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot A_0 \\ &= \frac{C(\omega_1) \cdot d - C(\omega_2) \cdot u}{(1+\rho) \cdot (d-u)} + \frac{C(\omega_2) - C(\omega_1)}{(d-u)}. \end{aligned}$$

Wie man sieht, hängt dieser nicht von p ab.

b) Da der faire Preis in a) nicht von der Wahrscheinlichkeit p abhängt, können sich "Bullen" und "Bären" am Finanzmarkt (die Kurssteigerungen mit großer bzw. kleiner Wahrscheinlichkeit erwarten) auf den gleichen Preis für den Claim C einigen.

Aufgabe 8. Betrachtet wir wieder der Finanzmarkt aus Aufgabe 7. Sei $B_1 = 1/(1+\rho)$ der Diskontierungsfaktor dieses Finanzmarkt.
Zeigen Sie: Der Parameter $p \in (0,1)$ kann so gewählt werden, dass der faire Preis eines Claims C immer gegeben ist durch

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{1+\rho} \cdot C\right).$$

Lösung: Nach Aufgabe 7 ist der faire Preis eines Claims C gegeben durch

$$\frac{C(\omega_1) \cdot d - C(\omega_2) \cdot u}{(1+\rho) \cdot (d-u)} + \frac{C(\omega_2) - C(\omega_1)}{(d-u)}.$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left(\frac{1}{1+\rho} \cdot C\right) &= \frac{1}{1+\rho} \cdot C(\omega_1) \cdot p + \frac{1}{1+\rho} \cdot C(\omega_2) \cdot (1-p) \\ &= \frac{1}{1+\rho} \cdot C(\omega_2) + \frac{1}{1+\rho} \cdot (C(\omega_1) - C(\omega_2)) \cdot p. \end{aligned}$$

Gleichsetzen dieser beiden Ausdrücke liefert

$$\frac{C(\omega_1) \cdot d - C(\omega_2) \cdot u}{(1+\rho) \cdot (d-u)} + \frac{C(\omega_2) - C(\omega_1)}{(d-u)} = \frac{1}{1+\rho} \cdot C(\omega_2) + \frac{1}{1+\rho} \cdot (C(\omega_1) - C(\omega_2)) \cdot p$$

bzw.

$$\frac{(C(\omega_1) \cdot - C(\omega_2)) \cdot d}{(1+\rho) \cdot (d-u)} + \frac{C(\omega_2) - C(\omega_1)}{(d-u)} = \frac{1}{1+\rho} \cdot (C(\omega_1) - C(\omega_2)) \cdot p.$$

Für $C(\omega_1) = C(\omega_2)$ erfüllt jedes $p \in (0,1)$ diese Gleichung.

Für $C(\omega_1) \neq C(\omega_2)$ ist die obige Gleichung äquivalent zu

$$\frac{d}{(1+\rho) \cdot (d-u)} + \frac{1}{(u-d)} = \frac{1}{1+\rho} \cdot p$$

bzw.

$$p = \frac{1+\rho-d}{u-d}.$$

Wegen

$$d < 1+\rho < u$$

gilt $p \in (0,1)$, w.z.z.w.