

**Aufgabe 7.** Wie in der Vorlesung wird im Folgenden ein Finanzmarkt im Ein-Perioden-Modell betrachtet, an dem es eine festverzinsliche Anlage und eine Aktie gibt. Die festverzinsliche Anlage wird mit Zinssatz  $\rho > 0$  verzinst. Die Aktie hat zur Zeit  $t = 0$  den Kurs  $A_0 \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$  sowie zur Zeit  $t = 1$  den Kurs

$$A_1 = \begin{cases} u \cdot A_0 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p, \\ d \cdot A_0 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - p, \end{cases}$$

wobei  $p \in (0, 1)$  und  $0 < d < u$ . Es gelte

$$d < 1 + \rho < u,$$

so dass der Finanzmarkt nach Vorlesung arbitragefrei und vollständig ist. Sei  $C$  ein beliebiger Claim.

- a) Zeigen Sie: Der faire Preis von  $C$  hängt nicht von  $p$  ab.  
b) Interpretieren Sie ihr Resultat aus a) anschaulich.

**Lösung:**

a) Nach Vorlesung gilt:

$x = (x_1, x_2)^T$  ist genau dann ein Hedge für  $C$ , wenn  $x = (x_1, x_2)^T$  Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 \cdot (1 + \rho) + x_2 \cdot u \cdot A_0 &= C(\omega_1) \\ x_1 \cdot (1 + \rho) + x_2 \cdot d \cdot A_0 &= C(\omega_2) \end{aligned}$$

ist.

Die Determinante dieses LGS ist

$$(1 + \rho) \cdot d \cdot A_0 - (1 + \rho) \cdot u \cdot A_0 = (1 + \rho) \cdot A_0 \cdot (d - u) \neq 0,$$

womit das LGS für jeden Claim eindeutig lösbar ist.

Nach der Cramerschen Regel erhält man die Lösung dieses LGS als:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{C(\omega_1) \cdot d \cdot A_0 - C(\omega_2) \cdot u \cdot A_0}{(1 + \rho) \cdot A_0 \cdot (d - u)} = \frac{C(\omega_1) \cdot d - C(\omega_2) \cdot u}{(1 + \rho) \cdot (d - u)}, \\ x_2 &= \frac{(1 + \rho) \cdot C(\omega_2) - (1 + \rho) \cdot C(\omega_1)}{(1 + \rho) \cdot A_0 \cdot (d - u)} = \frac{C(\omega_2) - C(\omega_1)}{A_0 \cdot (d - u)}, \end{aligned}$$

so dass der faire Preis des Claims gegeben ist durch

$$\begin{aligned} x^T S_0 &= x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot A_0 \\ &= \frac{C(\omega_1) \cdot d - C(\omega_2) \cdot u}{(1 + \rho) \cdot (d - u)} + \frac{C(\omega_2) - C(\omega_1)}{(d - u)}. \end{aligned}$$

Wie man sieht, hängt dieser nicht von  $p$  ab.

b) Da der faire Preis in a) nicht von der Wahrscheinlichkeit  $p$  abhängt, können sich “Bullen” und “Bären” am Finanzmarkt (die Kurssteigerungen mit großer bzw. kleiner Wahrscheinlichkeit erwarten) auf den gleichen Preis für den Claim  $C$  einigen.

**Aufgabe 8.** Betrachtet wir wieder der Finanzmarkt aus Aufgabe 7. Sei  $B_1 = 1/(1 + \rho)$  der Diskontierungsfaktor dieses Finanzmarkt.

Zeigen Sie: Der Parameter  $p \in (0, 1)$  kann so gewählt werden, dass der faire Preis eines Claims  $C$  immer gegeben ist durch

$$\mathbf{E} \left( \frac{1}{1 + \rho} \cdot C \right).$$

**Lösung:** Nach Aufgabe 7 ist der faire Preis eines Claims  $C$  gegeben durch

$$\frac{C(\omega_1) \cdot d - C(\omega_2) \cdot u}{(1 + \rho) \cdot (d - u)} + \frac{C(\omega_2) - C(\omega_1)}{(d - u)}.$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left( \frac{1}{1 + \rho} \cdot C \right) &= \frac{1}{1 + \rho} \cdot C(\omega_1) \cdot p + \frac{1}{1 + \rho} \cdot C(\omega_2) \cdot (1 - p) \\ &= \frac{1}{1 + \rho} \cdot C(\omega_2) + \frac{1}{1 + \rho} \cdot (C(\omega_1) - C(\omega_2)) \cdot p. \end{aligned}$$

Gleichsetzen dieser beiden Ausdrücke liefert

$$\frac{C(\omega_1) \cdot d - C(\omega_2) \cdot u}{(1 + \rho) \cdot (d - u)} + \frac{C(\omega_2) - C(\omega_1)}{(d - u)} = \frac{1}{1 + \rho} \cdot C(\omega_2) + \frac{1}{1 + \rho} \cdot (C(\omega_1) - C(\omega_2)) \cdot p$$

bzw.

$$\frac{(C(\omega_1) \cdot -C(\omega_2)) \cdot d}{(1 + \rho) \cdot (d - u)} + \frac{C(\omega_2) - C(\omega_1)}{(d - u)} = \frac{1}{1 + \rho} \cdot (C(\omega_1) - C(\omega_2)) \cdot p.$$

Für  $C(\omega_1) = C(\omega_2)$  erfüllt jedes  $p \in (0, 1)$  diese Gleichung.

Für  $C(\omega_1) \neq C(\omega_2)$  ist die obige Gleichung äquivalent zu

$$\frac{d}{(1 + \rho) \cdot (d - u)} + \frac{1}{(u - d)} = \frac{1}{1 + \rho} \cdot p$$

bzw.

$$p = \frac{1 + \rho - d}{u - d}.$$

Wegen

$$d < 1 + \rho < u$$

gilt  $p \in (0, 1)$ , w.z.z.w.