Aufgabe 4. Zeigen Sie Satz 5 der Vorlesung:

Sei $C_A(t)$ bzw. $P_A(t)$ der Preis eines amerikanischen Calls bzw. Puts auf Aktie S mit gleichem AÜP $K > 0$, gleicher Zinsrate $r > 0$ und gleichem Verfallszeitpunkt T. Wird auf Aktie keine Dividende gezahlt, dann gilt für $t \in [0, T]$:

$$S_t - K \leq C_A(t) - P_A(t) \leq S_t - Ke^{-r(T-t)} .$$

Lösung:

1.) Zeige: $C_A(t) - P_A(t) \leq S_t - Ke^{-r(T-t)}$.
$\rightsquigarrow$ Folgt mit $P_A(t) \geq P_E(t)$, Satz 3 und Satz 4.

2.) Zeige: $S_t - K \leq C_A(t) - P_A(t)$.
Angenommen, es gelte: $S_t - K > C_A(t) - P_A(t)$.

$\rightsquigarrow$ Strategie: Kaufe Call, verkaufe Put, führe Aktienleerverkauf für S_t durch, lege K Geldeinheiten an zum risikolosen Zinssatz r.

$\Rightarrow$ Vermögen im Zeitpunkt t: $-C_A(t) + \underbrace{P_A(t) + S_t - K}_{>C_A(t) \text{ n.Ann.}} > 0$

$\rightsquigarrow$ Zum Zeitpunkt t Anfangsgewinn > 0 erzielt.

1. Fall: Put wird vor T ausgeübt.
$\rightsquigarrow$ Halter der Strategie kauft Aktie zum Preis K und gleicht Aktienleerverkauf aus.
$\rightsquigarrow$ Halter besitzt insgesamt: Call + Zins vom risikolos angelegten Geld + Anfangsgewinn: Widerspruch zur Arbitragefreiheit

2. Fall: Put wird vor T nicht ausgeübt.
Betrachte Zeitpunkt T.

i) $S_T \geq K$: (d. h. Put wird nicht ausgeübt)
$\rightsquigarrow$ Halter kauft Aktie zum Preis K mit Hilfe vom Call und gleicht Aktienleerverkauf aus.
$\rightsquigarrow$ Halter besitzt insgesamt: Zins vom risikolos angelegten Geld + Anfangsgewinn: Widerspruch zur Arbitragefreiheit

ii) $S_T < K$:
$\rightsquigarrow$ Put wird ausgeübt, Halter **muss** Aktie zum Preis K kaufen und gleicht Aktienleerverkauf aus.
$\rightsquigarrow$ Halter besitzt insgesamt: Zins vom risikolos angelegten Geld + Anfangsgewinn: Widerspruch zur Arbitragefreiheit

$\square$

Aufgabe 5. Zeigen Sie Lemma 1 der Vorlesung:
Ein Modell ist genau dann arbitragefrei, falls kein Portfolio x existiert mit

$$x^T S_0 \leq 0, \quad x^T S_1 \geq 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{P}[x^T S_1 > x^T S_0] > 0.$$

Beweis: "$\Leftarrow$" Klar.
"$\Rightarrow$" Mit Kontraposition.
Sei x ein Portfolio mit

$$x^T S_0 < 0, \quad , x^T S_1 \geq 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{P}[x^T S_1 > x^T S_0] > 0.$$

Sei y ein als existent vorausgesetztes Portfolio mit $y^T S_0 > 0$ und $y^T S_1 = 1$. Setze

$$z = x + \lambda \cdot y \quad \text{mit} \quad \lambda = -\frac{x^T S_0}{y^T S_0} > 0.$$

Dann gilt

$$z^T S_0 = x^T S_0 - \frac{x^T S_0}{y^T S_0} y^T S_0 = 0$$

und

$$z^T S_1 = x^T S_1 + \lambda y^T S_1 = x^T S_1 + \lambda,$$

so dass

$$\mathbf{P}[z^T S_1 > 0] = \mathbf{P}[x^T S_1 + \lambda > 0] \geq \mathbf{P}[x^T S_1 \geq 0] = 1.$$

$\square$

Aufgabe 6. Bestimmen Sie im Beispiel aus der Vorlesung einen Hedge zu einem europäischem Put mit Basispreis $K > 0$ und Verfallstermin $T = 1$, d.h. zu

$$C = (K - A_1)^+,$$

und interpretieren Sie diesen anschaulich.
Welchen Wert erhalten Sie damit für den Preis dieser Put-Option ?

Lösung: Betrachte einen Claim C und ein Portfolio $x = (x_1, x_2)^T$. Dann gilt:

$$x \text{ ist Hedge für } C \quad \Leftrightarrow \quad x^T S_1(\omega_i) = C(\omega_i) \quad (i \in \{1, 2\}).$$

Also ist x genau dann ein Hedge für C, wenn $x = (x_1, x_2)^T$ Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 \cdot (1 + \rho) + x_2 \cdot u \cdot A_0 &= C(\omega_1) \\ x_1 \cdot (1 + \rho) + x_2 \cdot d \cdot A_0 &= C(\omega_2) \end{aligned}$$

ist.
Die Determinante dieses LGS ist

$$(1+\rho) \cdot d \cdot A_0 - (1+\rho) \cdot u \cdot A_0 = (1+\rho) \cdot A_0 \cdot (d-u) \neq 0,$$

womit das LGS für jeden Claim eindeutig lösbar ist.

Speziell: Zu einem europäischem Put mit Basispreis $K > 0$ und Verfallstermin $T = 1$, d.h. zu

$$C = (K - A_1)^+,$$

erhält man mit Hilfe der Cramerschen Regel den Hedge

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{(K-u \cdot A_0)^+ d \cdot A_0 - (K-d \cdot A_0)^+ u \cdot A_0}{(1+\rho) \cdot A_0 \cdot (d-u)} = \frac{(K-d \cdot A_0)^+ u - (K-u \cdot A_0)^+ d}{(1+\rho) \cdot (u-d)}, \\ x_2 &= \frac{(1+\rho) \cdot (K-d \cdot A_0)^+ - (1+\rho) \cdot (K-u \cdot A_0)^+}{(1+\rho) \cdot A_0 \cdot (d-u)} = \frac{(K-u \cdot A_0)^+ - (K-d \cdot A_0)^+}{A_0 \cdot (u-d)}. \end{aligned}$$

Wegen $x_1 \geq 0$ und $x_2 \leq 0$ bedeutet dieser Hedge anschaulich: "Leihe Aktie (d.h. führe Aktienleerverkauf durch) und lege das Geld im Bond an".

Für den fairen Preis dieser Put-Option erhält man:

$$\begin{aligned} s(P) &= x^T S_0 = x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot A_0 \\ &= \frac{(K-d \cdot A_0)^+ u - (K-u \cdot A_0)^+ d}{(1+\rho) \cdot (u-d)} + \frac{(K-u \cdot A_0)^+ - (K-d \cdot A_0)^+}{u-d}. \end{aligned}$$