Aufgabe 1. Erläutern Sie, wie Optionen vom Typ *Bull-Spread* bzw. *Bear-Spread* durch Linearkombinationen von Plain Vanillas nachgebildet werden können.

Lösung: Einem Bull-Spread mit Parametern $K_1 < K_2$ entspricht bezüglich der Auszahlung der gleichzeitige Besitz

- eines Europäischem Calls mit Ausübungspreis K_1,
- der short position in einem Europäischem Call mit Ausübungspreis K_2.

Einem Bear-Spread mit Parametern $K_1 < K_2$ entspricht bezüglich der Auszahlung der gleichzeitige Besitz

- eines Europäischem Puts mit Ausübungspreis K_2,
- der short position in einem Europäischem Put mit Ausübungspreis K_1.

Aufgabe 2. Zeigen Sie Satz 1 b) der Vorlesung:

Ist $P_A(t)$ der Preis eines amerikanischen Puts auf Aktie S mit AÜP $K \geq 0$, so gilt für $t \in [0, T]$:

$$(K - S_t)^+ \leq P_A(t) \leq K.$$

Lösung: Angenommen, $P_A(t) > t$. Dann führt der Verkauf des Puts und Anlage des Vermögens K in ein festverzinsliches Wertpapier zu einem Anfangsgewinn von

$$P_A(t) - K > 0.$$

Wird der Put bis zum Zeitpunkt T ausgeübt, kann der Kauf der Aktie vom angelegten Kapital erfolgen, wird er nicht ausgeübt bleibt das angelegte Kapital sogar komplett erhalten. In beiden Fällen hat man nach Ablauf der Laufzeit des Puts noch mindestens den Anfangsgewinn übrig, was einer Arbitrage entspricht und daher ein Widerspruch zur Arbitragefreiheit ist.

Zum Nachweis der anderen Ungleichung nehmen wir

$$(K - S_t)^+ > P_A(t) \, (\geq 0)$$

an. Dann gilt insbesondere

$$K - S_t > P_A(t), \quad \text{also auch} \quad K > S_t.$$

Daher führt die Strategie: “Kaufe Put und Aktie zum Zeitpunkt t und verkaufe Aktie mit Hilfe des Puts sofort für den Preis K” zum Gewinn

$$-P_A(t) - S_t + K > 0,$$

was einer Arbitrage entspricht und daher ein Widerspruch zur Arbitragefreiheit ist.

Aufgabe 3. Zeigen Sie Satz 2 b) der Vorlesung:

Sei $P_E(t)$ der Preis eines europäischen Puts auf Aktie S mit AÜP $K \geq 0$ und Verfallszeitpunkt T. Wird auf den Basiswert keine Dividende gezahlt, dann gilt für $t \in [0, T]$:

$$(e^{-r(T-t)}K - S_t)^+ \leq P_E(t) \leq K.$$

Lösung: Wegen $P_E(t) \leq P_A(t)$ folgt die zweite Ungleichung aus Aufgabe 2.

Zum Nachweis der ersten Ungleichung nehmen wir

$$(e^{-r(T-t)}K - S_t)^+ > P_E(t)\ (\geq 0)$$

an. In diesem Fall ist insbesondere

$$e^{-r(T-t)}K - S_t - P_E(t) > 0,$$

so dass Kauf der Aktie und des Puts zum Zeitpunkt t und gleichzeitiges Leihen von $e^{-r(T-t)}K$ zu einem positiven Anfangsgewinn führt. Zusätzlich besitzt man dann die Aktie und den Put und muss am Ende das geliehene Geld (mit Zinsen, also den Betrag K) zurückzahlen.

Ist nun zum Zeitpunkt T die Aktie mehr Wert als K, so lässt man den Put verfallen, verkauft die Aktie am Markt und zahlt davon das geliehene Geld zurück.

Ist dagegen am Ende die Aktie weniger als K Wert, so übt man den Put aus und verkauft sie mit Hilfe des Puts zum Preis K und zahlt davon das geliehene Geld zurück.

In beiden Fällen hat man am Ende (ohne Einsatz von weiterem Kapital) alle Verpflichtungen eingelöst und kann zusätzlich den Anfangsgewinn behalten, was einer Arbitrage entspricht und daher ein Widerspruch zur Arbitragefreiheit ist.