Aufgabe 11. Zeigen Sie die Itô-Formel für zeitabhängige Funktionen:

Sei W_t eindimensionale Brownsche Bewegung, sei X_t reellwertiger Itô-Prozess mit

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s \text{ und sei}$$

$f : [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und auf $[0,T) \times (0,\infty)$ zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt für alle $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} f(t, X_t) = f(0, X_0) \quad &+ \quad \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) ds \;+\; \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) dX_s \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) d < X >_s \end{aligned}$$

Hinweis: Gehen Sie analog zum Beweis von Satz 11 vor. Betrachten Sie dabei in 2)

$$\begin{aligned} &f(t_i, X_{t_i}) - f(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}) \\ &= [f(t_i, X_{t_i}) - f(t_{i-1}, X_{t_i})] + [f(t_{i-1}, X_{t_i}) - f(t_{i-1}, X_{t_{i-1}})] \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(\tau_i, X_{t_i}) \cdot (t_i - t_{i-1}) + \frac{\partial f}{\partial x}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}}) \cdot (X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_{i-1}, X_{t_{i-1}} + \Theta(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})) \cdot (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 \end{aligned}$$

mit $t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$.

Aufgabe 12. Zeigen Sie: Die Funktion

$$u(\tau, x) = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\tau}} \cdot \exp\left(\frac{-(x-s)^2}{4\tau} \right) ds$$

ist Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$u_\tau = u_{xx}.$$

Hinweis: Verwenden Sie ohne Beweis, dass Sie den Ableitungsoperator und das Integral vertauschen dürfen.