Aufgabe 9. Zeigen Sie:

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X\colon (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$ eine integrierbare ZV und $Y\colon (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\Omega', \mathcal{A}')$ eine ZV. Dann ex. Abb. $g\colon (\Omega', \mathcal{A}') \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mit $E(X \mid Y) = g \circ Y$. Die Abbildung g ist eindeutig bis auf die Äquivalenz "$= P_Y$-f.ü. "

Bemerkung: Die Abbildung g ist die sog. **Faktorisierung der bedingten Erwartung** mit Schreibweise

$$g(y) = E(X|Y = y).$$

Hinweis zur Existenz von g: Setze $Z = E(X|Y)$ und betrachte die Fälle: "Z nimmt nur die Werte Null und Eins an" bzw. "Z ist nichtnegativ einfach" bzw. "Z ist nichtnegativ" bzw. "Z hat beliebige Bauart" jeweils separat.

Aufgabe 10. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X\colon (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$ eine integrierbare ZV und $Y\colon (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\Omega', \mathcal{A}')$ eine ZV.

Begründen Sie:

a) $X = c$ f.s. $\Longrightarrow E(X \mid Y = \cdot) = c\;\; P_Y$-f.ü.

b) $X \geq 0$ f.s. $\Longrightarrow E(X \mid Y = \cdot) \geq 0\;\; P_Y$-f.ü.

c) $E(\alpha X_1 + \beta X_2 \mid Y = \cdot) = \alpha E(X_1 \mid Y = \cdot) + \beta E(X_2 \mid Y = \cdot)\;\; P_Y$-f.ü.

d) $X_1 \leq X_2$ f.s. $\Longrightarrow E(X_1 \mid Y = \cdot) \leq E(X_2 \mid Y = \cdot)\;\; P_Y$-f.ü.

Hinweis: Diese Behauptungen folgen (fast) unmittelbar aus der Definition von $E(X \mid Y = \cdot)$ und Sätzen aus der Vorlesung.