

**Aufgabe 9.** Zeigen Sie:

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $X: (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$  eine integrierbare ZV und  $Y: (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$  eine ZV. Dann ex. Abb.  $g: (\Omega', \mathcal{A}') \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$  mit  $E(X | Y) = g \circ Y$ . Die Abbildung  $g$  ist eindeutig bis auf die Äquivalenz “=  $P_Y$ -f.ü.”

**Bemerkung:** Die Abbildung  $g$  ist die sog. **Faktorisierung der bedingten Erwartung** mit Schreibweise

$$g(y) = E(X | Y = y).$$

*Hinweis zur Existenz von  $g$ :* Setze  $Z = E(X | Y)$  und betrachte die Fälle: “ $Z$  nimmt nur die Werte Null und Eins an” bzw. “ $Z$  ist nichtnegativ einfach” bzw. “ $Z$  ist nichtnegativ” bzw. “ $Z$  hat beliebige Bauart” jeweils separat.

**Aufgabe 10.** Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $X: (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$  eine integrierbare ZV und  $Y: (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$  eine ZV.

Begründen Sie:

- $X = c$  f.s.  $\implies E(X | Y = \cdot) = c$   $P_Y$ -f.ü.
- $X \geq 0$  f.s.  $\implies E(X | Y = \cdot) \geq 0$   $P_Y$ -f.ü.
- $E(\alpha X_1 + \beta X_2 | Y = \cdot) = \alpha E(X_1 | Y = \cdot) + \beta E(X_2 | Y = \cdot)$   $P_Y$ -f.ü.
- $X_1 \leq X_2$  f.s.  $\implies E(X_1 | Y = \cdot) \leq E(X_2 | Y = \cdot)$   $P_Y$ -f.ü.

*Hinweis:* Diese Behauptungen folgen (fast) unmittelbar aus der Definition von  $E(X | Y = \cdot)$  und Sätzen aus der Vorlesung.