Aufgabe 7. Wie in der Vorlesung wird im Folgenden ein Finanzmarkt im Ein-Perioden-Modell betrachtet, an dem es eine festverzinsliche Anlage und eine Aktie gibt. Die festverzinsliche Anlage wird mit Zinssatz $\rho > 0$ verzinst. Die Aktie hat zur Zeit $t = 0$ den Kurs $A_0 \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ sowie zur Zeit $t = 1$ den Kurs

$$A_1 = \begin{cases} u \cdot A_0 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p, \\ d \cdot A_0 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - p, \end{cases}$$

wobei $p \in (0, 1)$ und $0 < d < u$. Es gelte

$$d < 1 + \rho < u,$$

so dass der Finanzmarkt nach Vorlesung arbitragefrei und vollständig ist. Sei C ein beliebiger Claim.

a) Zeigen Sie: Der faire Preis von C hängt nicht von p ab.
b) Interpretieren Sie ihr Resultat aus a) anschaulich.

Aufgabe 8. Betrachtet wir wieder der Finanzmarkt aus Aufgabe 7. Sei $B_1 = 1/(1 + \rho)$ der Diskontierungsfaktor dieses Finanzmarkt.
Zeigen Sie: Der Parameter $p \in (0, 1)$ kann so gewählt werden, dass der faire Preis eines Claims C immer gegeben ist durch

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{1+\rho} \cdot C\right).$$

Bemerkung: Das zu diesem Wert von p gehörende Wahrscheinlichkeitsmaß heißt risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß. Bei diesem kann der faire Preis eines Claims durch Mittelung der abdiskontierten Auszahlung des Claims gebildet werden.