Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/2008
17.1.2008

12. Übungsblatt zur „Mathematik I für Chemiker“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Geradendarstellung)

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung und die Hessesche Normalform derjenigen Geraden g an, auf der die Punkte $P_1 = (0, 2)$ und $P_2 = (-1, 4)$ liegen.

(b) Bestimmen Sie die Hessesche Normalform der Geraden $h = \{\vec{r}_1 + \lambda \cdot \vec{t} \| \lambda \in \mathbb{R}\}$, wobei $\vec{r} = (1, 2)$ und $\vec{t} = (3, -1)$ ist.

(c) Bestimmen Sie, soweit vorhanden, den Schnittpunkt beider Geraden.

(d) Was ist der Abstand des Punktes $P_3 = (5, 2)$ von beiden Geraden?.

Lösung:

(a) Als Fusspunkt wählen wir P_1, als Richtungsvektor die Differenz der Kordinaaten der Punkte P_1, P_2. Eine Parameterdarstellung der Geraden ist dann gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Ein zum Ricgtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ orthogonaler Vektor ist $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Also ist die Geradengleichung für g von der Form $2\,x + 1\,y = C$. Die Konstante C bestimmen wir durch einsetzen des Punktes P_1. Daher $C = 2\,0 + 1\,2 = 2$. Nun normieren wir, wobei wir darauf achten, dass die rechte Seite der Gleichung positiv is. Die Hessesche Normalenform von g ist

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot x + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot y = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

beziehungsweise

$$\cos \beta \cdot x + \sin \beta \cdot y = d$$

für $\beta = \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$ und $d = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

(b) Ein zum Richtungsvektor $\vec{t}$ orthogonaler Vektor ist $(1, 3)^T$. Die Geradengleichung für hat die Form $1 \cdot x + 3 \cdot y = C$. Konstante C bestimmen durch einsetzen von $\vec{r}$ ergibt: $C = 7$. Nun wird wieder normiert. Die Hessesche Normalform der Geraden ist

$$\frac{1}{\sqrt{10}} \cdot x + \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot y = \frac{7}{\sqrt{10}}$$

beziehungsweise

$$\cos\beta \cdot x + \sin\beta \cdot y = d$$

für $\beta = \arccos \frac{1}{\sqrt{10}}$ und $d = \frac{7}{\sqrt{10}}$.

(c) Schnittpunkt: Wir setzen die Parameterdarstellung von g in die Geradengleichung von h ein, das ergibt eine Bedingung an *lambda*.

$$1 \cdot (0 + 1 \cdot \lambda) + 3 \cdot (2 - 2 \cdot \lambda) = 7 \Leftarrow \lambda = \frac{-1}{5}$$

also ist der Schnittpunkt von g und h gleich $(0, 2)^T - (1/5)(1, -2)^T = (-1/5, 12/6)^T$.

(d) Um den Abstand eines Punktes zur Geraden auszurechnen, die in Normalenform gegeben ist, müssen wir den Punkt nur in die Hessesche Normalenform einsetzen: Also Abstand von Punkt $(5, 2)$ zu g: $\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 5 + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 2 - \frac{2}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$ und zu h: $\frac{1}{\sqrt{10}} \cdot 5 + \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot 2 - \frac{7}{\sqrt{10}} = \frac{2}{5}\sqrt{10}$.

Aufgabe G2 (Geradendarstellung)
Seien P_1 und P_2 zwei verschiedene Punkte des $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass die Menge aller Punkte, deren Abstand von P_1 gleich dem Abstand von P_2 ist, eine Gerade darstellen.

Lösung: Lösung: Der Abstand eines Punktes (x, y) von P_1 ist $\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$, der Abstand von P_2 ist $\sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}$. Gleichsetzen der beiden Abstände liefert die Gleichung $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$ oder genauso $2(x_1 - x_2) \cdot x + 2(y_1 - y_2) \cdot y = x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2$. Letzteres ist eine Geradengleichung für (x, y).

Aufgabe G3 (Parallelen und Winkel)
Gegeben seien die Gerade $g : 5x - 4y = 3$ und der Punkt $P = (2, 0)$.

(a) Geben Sie eine Gleichung an, welche die Parallele von g durch P beschreibt.

(b) Berechnen Sie den (kleineren der beiden) Winkel zwischen g und der Geraden $h : 2x + 3y = -2$.

Lösung: Lösung:

(a) Wir geben eine Gleichung an, welche die Parallele von g durch P beschreibt. Setzen wir den Punkt $(2, 0)$ in die linke Seite der Geradengleichung ein für g ein, so erhalten wir $5 \cdot 2 - 4 \cdot 0 = 10$. Die Gleichung für die Parallele durch P lautet daher: $5x - 4y = 10$.

(b) Der Winkel zwischen den Geraden ist gleich dem Winkel zwischen den Normalenvektoren. Daher

$$\cos\beta = \frac{5 \cdot 2 - 4 \cdot 3}{\sqrt{5^2 + 4^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{-2}{\sqrt{533}}$$

also $\beta = \arccos \frac{-2}{\sqrt{533}}$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Geraden, 4P)
Gegeben sind die beiden Geraden

$$g_1 : \; a \cdot x - 12y = -4 \quad \text{und } g_2 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

sowie der Punkt $P = (4, 1)$. Bestimmen Sie den Parameter $a \in \mathbb{R}$ jeweils so, dass

(a) der Punkt P auf der Geraden liegt,

(b) die Geraden g_1 und g_2 parallel sind,

(c) die Geraden g_1 und g_2 senkrecht aufeinander stehen.

Lösung: Lösung:

(a) Der Punkt P liegt auf der Geraden g_1 genau dann, wenn die Gleichung $a \cdot 4 - 12 \cdot 1 = -4$ gilt, also $a = 2$ ist.

(b) Zwei Graden in der Ebene sind parallel, falls der Richtungsvektor der einen Geraden senkrecht zum Normalenvektor der anderen geraden ist, d.h. wenn

$$\begin{pmatrix} a \\ -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 4a - 12 \cdot 3 = 0$$

was genau dann der Fall ist, wenn $a = 9$ gilt.

(c) Zwei Geraden in der Ebene sind senkrecht zueinander (orthogonal) genau dann wenn der Richtungsvektor der einen Geraden ein Vielfaches des Normalenvektors der anderen geraden ist, das heisst falls

$$\begin{pmatrix} a \\ -12 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

was genau dann der Fall ist, wenn $a = -16$ gilt.

Aufgabe H2 (Bestapproximation, 4P)

Bestimmen Sie denjenigen Punkt auf der Geraden $g = \{\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, der den kürzesten Abstand zum Punkt $P = (5, -1)$ hat.

Lösung: Lösung: Da die Gerade durch den Usprung geht, reicht es aus, die Projektion von P auf g zu berechnen. Dazu normieren wir den Richtungsvektor von g zunächst: $w = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}(1,2)^T$ und berechnen dann

$$proj_g(P) = \langle P, w \rangle \cdot w = \frac{1}{5} \langle (5,-1), (2,1) \rangle (2,1)^T = \frac{9}{5} \cdot (2,1)^T$$

Aufgabe H3 (Ebenengleichung, 3P)

Bestimmen sie den Abstand d der Ebene

$$E : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mu, \lambda \in \mathbb{R}$$

zum Koordinaten-Usrprung.

Lösung: Lösung: Wir berechnen zunächst den Normalenvektor der Ebene:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Daher ist $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (1, -1, 2)^T$. Die Hessesche Normalenform ist dann gegeben durch

$$\vec{n} \cdot [\vec{x} - \vec{a}] = 0$$

wobei $\vec{a}$ ein Punkt auf der Ebene ist. Wir setzen $\vec{a} = (1,0,1)^T$. Dann ist $\vec{n} \cdot \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)^T \cdot (1,0,1)^T = \frac{3}{\sqrt{6}}$ der Abstand der Ebene vom Ursprung.