Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2007/2008
10.1.2008

11. Übungsblatt zur „Mathematik I für Chemiker“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Uneigentliches Integral)
Untersuchen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin^2 t}\, dt$$

auf Konvergenz und berechnen Sie seinen (uneigentlichen) Wert.

Lösung: Lösung: Wir untersuchen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin^2 t}\, dt = \lim_{a\to 0} \int_a^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin^2 t}\, dt\,.$$

Wir substituieren den Nenner: $u = \sin^2 t$ woraus $\frac{du}{dt} = 2\sin t\,\cos t$ folgt, also $dt = \frac{du}{2\sin t\,\cos t} = \frac{du}{2\sqrt{u}\,\cos t}$. Einsetzen liefert

$$\int \frac{\cos t}{\sin^2 t}\, dt = \int \frac{\cos t}{u} \frac{du}{2\sqrt{u}\,\cos t} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^{(3/2)}}\, du = -u^{-(1/2)}$$

Also nach Rücksubstitution:

$$\lim_{a\to 0} \int_a^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin^2 t}\, dt = -\lim_{a\to 0} \Big(u(t)^{-(1/2)}\Big)_{t=a}^{t=\frac{\pi}{2}} = -\lim_{a\to 0} \left(\frac{1}{\sin x}\right)_a^{(} \pi/2) = -\lim_{a\to 0} \left(1 - \frac{1}{\sin a}\right) = \infty$$

Das uneigentliche Integral existiert nicht!

Aufgabe G2 (Uneigentliches Integral)
Zeigen Sie, dass

$$\int_0^{\infty} e^{-t}\,\cos t\, dt = \frac{1}{2}$$

gilt.

Lösung: Lösung: Partielle Integration mit $u = e^{-t}$, $v' = \cos t$ liefert $u' = -e^{-t}$ und $v = \sin t$. Daher nach einsetzen in die partielle Integartionsformel

$$\int_0^{\infty} e^{-t}\,\cos t\, dt = \lim_{a\to\infty} \int_0^{a} e^{-t}\,\cos t\, dt = \lim_{a\to\infty} \int_0^{a} e^{-t}\,\sin t\, dt$$

Erneute partielle Integration mit $u = e^t$, $v' = \sin t$ und $u' = -e^{-t}$, $v = -\cos t$ liefert

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-t}\,\sin t\,dt = 1 - \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-t}\,\sin t\,dt$$

woraus folgt

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-t}\,\sin t\,dt = \frac{1}{2}$$

Aufgabe G3 (Reihenberechnung)
Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^\nu}{3\nu+3}, \quad 0 < x < 1\,,$$

indem Sie die Summanden in geeigneter Weise als Integral interpretieren und anschliessend formal Integration und Summation vertauschen.

Lösung: Lösung:

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^\nu}{3\nu+3} &= \frac{1}{3}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^\nu}{\nu+1} = \frac{1}{3x}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^{\nu+1}}{\nu+1}\\ &= \frac{1}{3x}\sum_{\nu=0}^{\infty}\int_0^x t^\nu\,dt = \frac{1}{3x}\int_0^x\sum_{\nu=0}^{\infty}t^\nu\,dt\\ &= \frac{1}{3x}\int_0^x\frac{1}{1-t}\,dt = -\frac{1}{3x}\ln(1-x) = \frac{1}{3x}\ln\frac{1}{1-x}\end{aligned}$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Uneigentliches Integral, 4P)
Untersuchen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty e^{-t}\,t^2\,dt$$

auf Konvergenz und berechnen Sie seinen (uneigentlichen) Wert.

Lösung: Lösung: Wir integrieren partiell: $u' = e^{-t}$, $v = t^2$ und $u = -e^{-t}$, $v' = 2t$. Daher

$$\int_0^\infty e^{-t}\,t^2\,dt = \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-t}\,t^2\,dt = \lim_{a\to\infty}\left(-e^{-a}\,a^2 + 0 + \int_0^a e^{-t}2t\,dt\right) = \lim_{a\to\infty}2\int_0^a e^{-t}t\,dt\,.$$

Nochmalige partielle Integration: $u' = e^{-t}$, $v = t$ und $u = -e^{-t}$, $v' = 1$ liefert

$$\begin{aligned}\lim_{a\to\infty}2\int_0^a e^{-t}t\,dt &= 2\lim_{a\to\infty}\left(-e^{-a}\,a + 0 + \int_0^a\int e^{-t}\,dt\right)\\ &= 2\lim_{a\to\infty}(-e^{-t})_0^a = 2\lim_{a\to\infty}(-e^{-a}+e^0) = 2\,.\end{aligned}$$

Aufgabe H2 (Uneigentliches Integral, 4P)
Ermitteln Sie den Bereich des Parameters α, für welchen das uneigentliche Integral

$$\int_2^\infty\frac{1}{t\,(\ln t)^\alpha}\,dt\,,$$

konvergiert.

Lösung: Lösung: Wir berechnen zunächst

$$\int_2^\infty \frac{1}{t\,(\ln t)^\alpha}\,dt = \lim_{a\to\infty}\int_2^a \frac{1}{t\,(\ln t)^\alpha}\,dt$$

Substituiere $u = \ln t$ mit $\frac{du}{dt} = \frac{1}{t}$. Dann gilt für $\alpha \neq 1$

$$\int \frac{1}{t\,(\ln t)^\alpha}\,dt = \int \frac{1}{t\,(u)^\alpha}\,t\,du = \int u^{-\alpha}\,du = \frac{1}{1-\alpha}u^{1-\alpha}\,.$$

Rücksubstitution und Einsetzen der Grenzen liefert

$$\lim_{a\to\infty}\int_2^a \frac{1}{t\,(\ln t)^\alpha}\,dt = \lim_{a\to\infty}\left(\frac{(\ln a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{(\ln 2)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) = -\frac{(\ln 2)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\,,$$

falls $\alpha > 1$. Für $\alpha = 1$ gilt

$$\lim_{a\to\infty}\int_2^a \frac{1}{t\,(\ln t)}\,dt = \lim_{a\to\infty}\int_{\ln 2}^{\ln a}\frac{1}{u}\,du = \lim_{a\to\infty}(\ln\ln a - \ln\ln 2) = \infty$$

Das uneigentliche Integral existiert also nur für $\alpha > 1$.

Aufgabe H3 (Uneigentliches Integral, 6P)

Gegeben sei die Funktion $f : [1,\infty] \mapsto \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$. Durch die Rotation von f um die x-Achse erhält man einen Trichter, dessen Volumen V und Oberfläche O durch

$$V = \pi\int_1^\infty |f(x)|^2\,dx\,, \qquad O = 2\pi\int_1^\infty f(x)\sqrt{1+|f'(x)|^2}\,dx\,,$$

gegeben ist. Damit das Ganze ein wenig hübscher aussieht, wird eine studentische Hilfskraft beauftragt, den Trichter von innen anzustreichen. Nach einer Woche harter Arbeit stellt die Hilfskraft nach erstmaligem Nachdenken fest, dass Sie Ihre Arbeit wohl niemals vollenden wird, da die Oberfläche des Trichters unendlich ist. Von Ihrem Tutor erhält sie den Rat: "Fülle den Trichter doch einfach bis zum Rand mit Farbe und schütte ihn anschliessend um. Dann sieht er wie neu aus." Ist dieser Rat praktikabel?

Lösung: Lösung: Wir zeigen zuerst, dass die Oberflache des Trichters nicht endlich ist:

$$2\pi\int_1^\infty f(x)\sqrt{1+|f'(x)|^2}\,dx = 2\pi\int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1+|-\frac{1}{x^2}}\,dx = 2\pi\int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx$$

Weil aber $\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}} \geq \frac{1}{x}$ und das Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$$

divergiert, divergiert auch (nach dem Vergleichskriterium)

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx\,.$$

Trotzdem ist das Volumen endlich:

$$V = \pi\int_1^\infty |f(x)|^2\,dx = \lim_{a\to\infty}\pi\int_1^a \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty}\pi\left(-\frac{1}{x}\right)_1^a = \pi < \infty$$