Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/2008
20.12.2007

# 10. Übungsblatt zur „Mathematik I für Chemiker“

## Gruppenübung

**Aufgabe G1** (Integration)

(a) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int^x (4t^n - 3\sin t)\,dt\,, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Hinweis: betrachten Sie das Integral für $n = -1$ separat.

(b) Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (2\cos t - \frac{5}{\cos^2 t})\,dt\,.$$

**Lösung:**

(a) Unter Verwendung der Linearität des Integrals gilt

$$\begin{aligned}\int^x (4t^n - 3\sin t)\,dt &= 4\int^x t^n\,dt - 3\int^x \sin t\,dt \\ &= \begin{cases} 4(\frac{x^{n+1}}{n+1} + c_1) - 3(-\cos x + c_2) & n \neq -1 \\ 4(\ln x + c_1) - 3(-\cos x + c_2) & n = -1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{4x^{n+1}}{n+1} + 3\cos x + C & n \neq -1 \\ 4\ln x + 3\cos x + C & n = -1 \end{cases}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (2\cos t - \frac{5}{\cos^2 t})\,dt &= 2\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos t\,dt - 5\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 t}\,dt \\ &= 2(\sin x)_{-\pi/4}^{\pi/4} - 5(\tan x)_{-\pi/4}^{\pi/4} \\ &= 2(\sin(\pi/4) - \sin(-\pi/4)) - 5(\tan(\pi/4) - \tan(-\pi/4)) \\ &= 2(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}) - 5(1+1) = 2(\sqrt{2} - 5)\end{aligned}$$

**Aufgabe G2** (Partielle Integration)

(a) Berechnen Sie die unbestimmten Integrale

$$\int^x t^n \,\ln t\, dt\,, \quad n \neq -1; \qquad \int^x te^t \, dt.$$

(b) Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_0^\pi t^2 \,\sin t\, dt\,.$$

**Lösung:**

(a) Partielle Integration ist die Umkehrung der Produktableitung und bedeutet anwenden der Formel: $\int u'\,v = u\,v - \int u\,v'$. Wir setzen $u' = t^n$ und $v = \ln t$. Daher $u = \frac{t^{n+1}}{n+1}$ und $v' = \frac{1}{t}$. Einsetzen in die Formel liefert

$$\begin{aligned}\int^x t^n \,\ln t\, dt &= \frac{x^{n+1}}{n+1}\,\ln x - \int^x \frac{t^{n+1}}{n+1}\frac{1}{t}\,dt \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1}\,\ln x - \int^x \frac{t^n}{n+1}\,dt \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1}\,\ln x - \frac{1}{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1}\,dt \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

(b) Das zweite unbestimmte Integral berechnen wir entsprechend. Wir setzen $u' = e^t$ und $v = t$. Dann ist $u = e^t$ und $v' = 1$. Einsetzen in die Formel liefert

$$\int^x te^t\, dt = x\,e^x - \int^x 1\,e^t\,dt = e^x(x-1)$$

(c) Das bestimmte Integral: wir setzen $u' = \sin t$ und $v = t^2$. Dann $u = -\cos t$ und $v' = 2t$. Einsetzen in die Formel liefert:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi t^2\,\sin t\,dt =& (-t^2\cos t)_0^\pi - \int_0^\pi 2t(-\cos t)\,dt \\ =& \;(-t^2\cos t)_0^\pi + 2\int_0^\pi t\,cost\,dt.\end{aligned}$$

Wiederholte partielle Integration mit $u' = \cos t$ und $v = t$ sowie $u = \sin t$ und $v' = 1$ ergibt

$$\begin{aligned}\int_0^\pi t^2\,\sin t\,dt =& \pi^2 + 2\left((t\sin t)_0^\pi - \int_0^\pi \sin t\,dt\right) \\ =& \;\pi^2 - 4\end{aligned}$$

**Aufgabe G3** (Flächenberechnung)

Berechnen Sie die Fläche $F$, die von dem Graphen der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1-(x-2)^2 & 1 \le x < 2, \\ -\cos(\frac{\pi}{2}x) & 2 \le x \le 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und der Geraden $y = 0$ eingeschlossen wird. Skizze!

**Lösung:** Es gilt

$$
\begin{aligned}
F &= \int_1^3 f(t)\,dt = \int_1^2 1-(t-2)^2\,dt + \int_2^3 -\cos(\frac{\pi}{2}t)\,dt \\
&= 1-\frac{1}{3}-\int_2^3 \cos(\frac{\pi}{2}t)\,dt \\
&= \frac{2}{3}-\left(\frac{2}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}t)\right)_2^3 \\
&= \frac{2}{3}-\frac{2}{\pi}\sin(\frac{3\pi}{2})+\frac{2}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}) \\
&= 2(\frac{1}{3}+\frac{1}{\pi}) \approx 1.30329
\end{aligned}
$$

## Hausübung

**Aufgabe H1** (Integration, 4 P)

(a) Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int^x (\frac{3}{\sin^2 t}-4t^3)\,dt\,.$$

(b) Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_0^{\ln 2} (2\cosh t-3\sinh t)\,dt\,.$$

**Lösung:** Ähnlich zur Gruppenübung ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\int^x (\frac{3}{\sin^2 t}-4t^3)\,dt &= 3\int^x \frac{1}{\sin^2 t}\,dt - 4\int^x t^3\,dt \\
&= -3\,\mathrm{cotan} x - 4x^4 + C
\end{aligned}
$$

Für das bestimmte Integral gilt

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\ln 2} (2\cosh t-3\sinh t)\,dt &= 2\int_0^{\ln 2}\cosh t\,dt - 3\int_0^{\ln 2}\sinh t\,dt \\
&= (2\sinh t)_0^{\ln 2} - (3\cosh t)_0^{\ln 2} \\
&= 2(\sinh\ln 2-\sinh 0) - 3(\cosh\ln 2-\cosh 0) = \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

**Aufgabe H2** (Partielle Integration, 6P)

(a) Berechnen Sie die unbestimmten Integrale

$$\int^x \sin t\,\cos t\,dt\,, \qquad \int^x e^{2t}\,\sin t\,dt.$$

(b) Berechnen Sie das bestimmte Integral

$$\int_1^e \frac{\ln t}{t}\,dt\,.$$

**Lösung:** Wir setzen $u' = \sin t$ und $v = \cos t$. Dann ist $u = -\cos t$ und $v' = -\sin t$. Partielle Integration liefert

$$\int^x \sin t\,\cos t\,dt = -\cos^2 x - \int^x (-\cos t)(-\sin t)\,dt = -\cos^2 x - \int^x \sin t\,\cos t\,dt$$

Also

$$\int^x \sin t\,\cos t\,dt = -\frac{1}{2}\cos^2 x$$

Das zweite Integral berechnen wir entsprechend: setze $u' = \sin t$ und $v = e^{2t}$ dann ist $u = -\cos t$ und $v' = 2e^{2t}$. Einsetzen in die Formel liefert

$$\int^x e^{2t}\,\sin t\,dt = (-\cos x)\,e^{2x} + 2\int^x (\cos t)\,e^{2t}\,dt$$

Wiederholte partielle Integration: $u' = \cos t$ und $v = e^{2t}$ so dass $u = \sin t$ und $v' = 2e^{2t}$ liefert

$$\begin{aligned}\int^x e^{2t}\,\sin t\,dt &= (-\cos x)\,e^{2x} + 2\int^x (\cos t)\,e^{2t}\,dt\\ &= (-\cos x)\,e^{2x} + 2\left[(\sin x)e^{2x} - \int^x \sin t\cdot 2e^{2t}\,dt\right]\end{aligned}$$

Auflösen zeigt:

$$\int^x e^{2t}\,\sin t\,dt = \frac{2\sin x - \cos x}{5}\,e^{2x}$$

Das bestimmte Integral: setze $u' = \frac{1}{t}$ und $v = \ln t$. Dann $u = \ln t$ und $v' = \frac{1}{t}$. Einsetzen in die Integrationsformel liefert

$$\int_1^e \frac{1}{t}\,\ln t\,dt = (\ln t\cdot\ln t)_1^e - \int_1^e \frac{lnt}{t}\,dt$$

Also

$$\int_1^e \frac{lnt}{t}\,dt = \frac{1}{2}(\ln t\cdot\ln t)_1^e = \frac{1}{2}$$

**Aufgabe H3** (Partielle Integration, 4P)

Sei $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,\sin(nx)\,dx = 0$$

gilt.

**Lösung:** Partielle Integration liefert:

$$\int_a^b f(x)\,\sin(nx)\,dx = [-f(x)\frac{\cos(nx)}{n}]_a^b + \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\cos(nx)\,dx$$

Weil $f$ und $f'$ auf $[a,b]$ stetig sind gibt es eine Konstante $M > 0$ so dass gilt: $\|f(x)\| \le M$, $\|f'(x)\| \le M$ für $x \in [a,b]$. Also gilt

$$\begin{aligned}\|\int_a^b f(x)\,\sin(nx)\,dx\| &\le \|[-f(x)\frac{\cos(nx)}{n}]_a^b\| + \|\frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\cos(nx)\,dx\|\\ &\le \frac{2M}{n} + \frac{1}{n}\int_a^b \|f'(x)\|\|\cos(nx)\|\,dx\\ &\le \frac{2M}{n} + \frac{1}{n}(b-a)\,M\cdot 1 \to 0 \quad \text{für } n\to\infty\end{aligned}$$

**Ich wünsche Ihnen ein frohes Weihnachtsfest und ein gutes Neues Jahr 2008!**
**Bitte wiederholen Sie in der vorlesungsfreien Zeit die behandelten Themen.**