Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/2008
13.12.2007

9. Übungsblatt zur „Mathematik I für Chemiker“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Regeln von de L'Hospital)

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte mit der Regel von de L'Hospital.

(a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$

(b) $\lim_{x\to 2} \frac{4x^2-8x}{x^2-x-2}$

(c) $\lim_{x\to 0^+} x^x$

Lösung:

(a) Es ist $\lim_{x\to\infty} \ln x = \lim_{x\to\infty} x = \infty$; wir wenden L'Hospital an: $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

(b) $\lim_{x\to 2} \frac{4x^2-8x}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{8x-8}{2x-1} = \frac{8}{3}$

(c) Wir formen zunächst um: $x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x\,\ln x}$. Also ist $\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\,\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln x}$, da die Exponentialfunktion stetig ist. Um nun auf $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$ l'Hospital anzuwenden, müssen wir den Ausdruck erst in die Form $\frac{f(x)}{g(x)}$ bringen. Dazu

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{(-1)x^{-2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

Also ist $\lim_{x\to 0^+} x^x = e^0 = 1$.

Aufgabe G2 (Extremstellen)

Untersuchen Sie das Polynom $f(x) = x^3 + ax^2 + 3bx,\ f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ und $D(f) = \mathbb{R}$ in Abhängigkeit von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ auf lokale Extremstellen .

Lösung: Lokale Extremstellen müssen $f'(x_0) = 0$ erfüllen. Hier $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 3b$. Also müssen wir $0 = x^2 + \frac{2}{3}ax + \frac{a^2}{9} - \frac{a^2}{9} + b$ lösen. Also $x = -\frac{a}{3} \pm \sqrt{\frac{a^2}{9} - b}$. Wir sehen: für $\frac{a^2}{9} < b$ gibt es überhaupt keine Extremstellen, da dann die Wurzel nicht existiert. Für $\frac{a^2}{9} = b$ gibt es einen Kandidaten ($x_0 = -\frac{a}{3}$. Aus geometrischen Gründen muss es ein Sattelpunkt sein: wegen $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ kann die Ableitung nur zweimal das Vorzeichen wechseln- oder nie (Mittelwertsatz!).
Im Fall $\frac{a^2}{9} > b$ liegen daher entweder zwei Sattelpunkte vor oder zuerst (links) ein lokales Maximum, dann ein lokales Minimum. Um dies zu entscheiden, setzen wir eine Stelle zwischen diesen beiden in f' ein. Wegen $-\sqrt{\frac{a^2}{9} - b} - \frac{a}{3} < -\frac{a}{3} < +\sqrt{\frac{a^2}{9} - b} - \frac{a}{3}$ bietet sich $\frac{-a}{3}$ an. Es ist $f'(-\frac{a}{3}) = b - \frac{a^2}{3}$.

Es liegen genau dann Extremalstellen vor, wenn, wenn $f'(-\frac{a}{3}) < 0$ gilt, also für $\frac{a^2}{3} > b$; Nach Vor. ist aber $\frac{a^2}{9} > b$, also erst recht $\frac{a^2}{3} > b$. Also gilt: f hat genau dann zwei Extremstellen, wenn $\frac{a^2}{9} > b$ gilt; für $\frac{a^2}{9} = b$ gibt es einen Sattelpunkt; sonst gibt es nichts.

Aufgabe G3 (Mittelwertsatz)

(a) Beweisen Sie die Ungleichung $e^x \geq 1 + x$ für alle $x \in [0, \infty)$ mit Hilfe des Mittelwertsatzes.

(b) Beweisen Sie die Ungleichung $\ln x \leq x - 1$ für alle $x \geq 1$.

Lösung: Für $x = 0$ ist die erste Ungleichung wahr, sei also $x > 0$. Wir wenden den Mittelwertsatz auf das Intervall $[a, b] = [0, x]$ an. Dann gibt es ein $\xi \in (0, x)$ mit

$$\frac{\exp(x) - \exp 0}{x - 0} = \exp'(\xi) \Rightarrow e^x - e^0 = e^\xi (x - 0)$$

also $e^x = e^\xi x + 1 \geq x + 1$. Dabei gilt die letzte Ungleichung, weil $e^0 = 1$ und e^x monoton wachsend ist. Für die zweite Ungleichung: O.B.d. A $x > 1$. Setze $y := x - 1$. Für $x \geq 1$ ist dann die erste Ungleichung auf y anwendbar: $e^y \geq y + 1$. Auf beiden Seiten können wir dann die ln Funktion anwenden, da ln streng monoton wachsend ist, haben wir $\ln e^y \geq \ln(y + 1)$ also $x - 1 = y \geq \ln(y + 1) = \ln x$.

Aufgabe G4 (Taylor-Polynom)

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sin(3x)\,.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom 3-ter Ordnung mit Entwicklungspunkt $x_0 = \pi$. Schätzen Sie den Fehler für $x = \frac{3\pi}{4}$.

Lösung: Die Ableitungen sind

$$f(x) = \sin(3x)\; f'(x) = 3\cos(3x)\; f^{(2)}(x) = -9\sin(3x),\; f^{(3)}(x) = -27\cos(3x),\; f^{(4)}(x) = 81\sin(3x)$$
$$f(\pi) = 0\; f'(\pi) = -3,\; f^{(2)}(\pi) = 0,\; f^{(3)}(\pi) = 27$$

Also:

$$T_3(x) = 0 - \frac{3}{1!}(x - \pi) + \frac{0}{2!}(x - \pi)^2 + \frac{27}{3!}(x - \pi)^3\,.$$

Mit dem Restglied nach Lagrange $R_3(x, 0) = f(x) - T_3(x) = \frac{81\sin(3\zeta)}{4!}(\frac{3\pi}{4} - \pi)^4, \zeta \in (\frac{3\pi}{4}, \pi)$ ergibt sich $|R_4(x, 0)| = \frac{81}{4!}1(\frac{3\pi}{4} - \pi)^4$. Für den Fehler folgt also $R_4(\frac{3\pi}{4}) \leq \frac{81}{4!}(\frac{3\pi}{4} - \pi)^4 = 1.2842019$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Extrema, 4 P)

Die Funktion f sei auf ganz $\mathbb{R}$ durch

$$f(x) = (x^3 - 4x^2 - 8x - 8)\,e^x$$

definiert. Bestimmen Sie alle lokalen Extremalstellen von f, sowie deren Typ. Bestimmen Sie ausserdem die globalen Extrema von f auf $[0, 2]$.

Lösung: Die ersten drei Ableitungen von f lauten:

$$f'(x) = x^2(x-1)\,e^x, \quad f''(x) = (x^3+2x^2-2x)\,e^x, \quad f'''(x) = (x^3+5x^2+2x-2)\,e^x$$

Die erste Ableitung verschwindet genau dann, wenn $x=0$ oder $x=1$ ist. An der Stelle $x=0$ liegt wegen $f''(0)=0$ und $f'''(0)\neq 0$ kein lokales Extremum vor , weil das kleinste n mit $f^{(n)}(0)\neq 0$ ungerade ist. Für $x=1$ gilt $f''(1)=e>0$. Also liegt bei $x=1$ ein lokales Minimum.

Aufgabe H2 (Trigonometrische Funktionen, 2P)
Zeigen Sie nur durch differenzieren und ausnutzen, dass $\sin(0)=0$, $\cos(0)=1$ ist, dass für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt: $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

Lösung: Die Gleichung auf beiden Seiten nach x ableiten zeigt: $2\sin x\cos x+2\cos x(-\sin x)=0$. Also ist $\sin^2 x+\cos^2 x = \mathit{konstant}$. Weil aber $\sin^2 0+\cos^2 0=1$, folgt die Behauptung.

Aufgabe H3 (de l'Hospital, 4P)
Bestimme folgende Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\ln(1+x)}$ für $a\neq b$

(b) $\lim_{x\to 0^+}\frac{a^x-b^x}{x}$ für $a,b>0$.

(c) $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

(d) $\lim_{x\to 1^-}\ln(x)\ln(1-x)$

Lösung:

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{ae^{ax}-be^{bx}}{\frac{1}{x+1}} = a-b$

(b) $\lim_{x\to 0^+}\frac{a^x-b^x}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{x\ln a}-e^{x\ln b}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln a e^{x\ln a}-\ln b e^{x\ln b}}{1} = \ln a-\ln b$

(c) Es ist $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ also $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=1$. Vorsicht: de l'Hospital führt hier nicht weiter!

(d) $\lim_{x\to 1^-}\ln(x)\ln(1-x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{\ln(1-x)}{(\ln x)^{-1}} = \lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{1-x}(-1)}{\frac{-1}{(\ln x)^2}\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(\ln x)^2 x}{1-x}$. Wir wenden nochmal de l'Hospital an: $\lim_{x\to 1^-}\frac{(\ln x)^2 x}{1-x} = \frac{2(\ln x)\frac{1}{x}\cdot x+(\ln x)^2}{-1} = 0$

Aufgabe H4 (Taylor, 4P)
Entwickeln Sie die Funktion $f(x)=x\,e^x$ in dem Punkt $x_0=0$ in eine Taylorreihe. Wie muss der Grad der Entwicklung gewählt werden, damit der Fehler $\leq 10^{-1}$ für $x\in[0,1]$.

Lösung: Die Ableitungen sind

$$f(x)=x\,e^x,\; f'(x)=e^x+xe^x,\; f^{(3)}(x)=2e^x+xe^x,\dots f^{(n)}(x)=ne^x+xe^x$$
$$f(0)=0\,f'(0)=1,\; f^{(3)}(x)=2,\dots f^{(n)}(0)=n$$

Also:

$$T_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k-1}!(x-0)^k$$

Das geht auch schneller: $x\,e^x = x\sum_{k=1}^\infty\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=1}^\infty\frac{x^{k+1}}{k!} = \sum_{k=1}^\infty\frac{x^k}{(k-1)!}$; daran lesen wir das Ergebnis auch ab. Zum Restglied nach Lagrange:

$$|R_n(x)| \leq \sup_{0\leq\xi\leq 1}\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| \leq \sup_{0\leq\xi\leq 1}\left|\frac{(n+1)e^\xi+\xi e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}\right|$$
$$\leq \left|\frac{(n+1)e+e}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \leq \left|\frac{(n+2)e}{(n+1)!}1\right|$$

Damit $|R_n|\leq 10^{-1}$ gilt, wähle $n\geq 5$.