Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/2008
6.12.2007

8. Übungsblatt zur „Mathematik I für Chemiker“

Zur Erinnerung, die Formel für die Taylorreihe um die Stelle x_0 lautet

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Gruppenübung

Aufgabe G1 ()

Betrachten Sie die Sinusfunktion

$$f(x) = \sin(x).$$

(a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach n, daß

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$$

gilt.

(b) Zeigen Sie, daß $f^{(2k)}(0) = 0$ und $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$ für jede natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) Berechnen Sie die Taylorreihe von der Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$.

Lösung: (a):
Induktionsanfang:

$$f^{(0)}(x) = \sin(x + 0 \cdot \frac{\pi}{2}) = \sin(x) = f(x)$$

Induktionsannahme:
Wir nehmen an, daß

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$$

bereits gezeigt wurde.
Induktionsschluß:
Wir müssen

$$f^{(n+1)}(x) = \sin(x + (n+1)\frac{\pi}{2})$$

zeigen:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))' &= (\sin(x + n\frac{\pi}{2}))' = \cos(x + n\frac{\pi}{2}) \\ &= \sin(x + n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) \\ &= \sin(x + (n+1)\frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

(b):
Es gilt

$$f^{(2k)}(0) = \sin(0 + 2k\frac{\pi}{2}) = \sin(k\pi) = 0.$$

Wir haben

$$f^{(2k+1)}(0) = \sin(0 + (2k+1)\frac{\pi}{2}).$$

Wir machen eine Fallunterscheidung: Betrachten wir den Fall, daß k gerade ist. Dann haben wir

$$\begin{aligned} f^{(2k+1)}(0) &= \sin(0 + (2k+1)\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = \sin(\frac{\pi}{2})\cos k\pi + \cos(\frac{\pi}{2})\sin k\pi \\ &= \sin(\frac{\pi}{2})\cos k\pi = 1 = (-1)^k. \end{aligned}$$

Betrachten wir den Fall, daß k ungerade ist. Dann haben wir

$$\begin{aligned} f^{(2k+1)}(0) &= \sin(0 + (2k+1)\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) = \sin(\frac{\pi}{2})\cos k\pi + \cos(\frac{\pi}{2})\sin k\pi \\ &= \sin(\frac{\pi}{2})\cos k\pi = -1 = (-1)^k. \end{aligned}$$

(c):
Nur ungerade Ordnungen liefern Beiträge. Somit haben wir

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ &= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \mp \cdots . \end{aligned}$$

Aufgabe G2 ()

Berechnen Sie die Taylorreihe von

$$f(x) = e^{\sin x}$$

um die Stelle $x_0 = 0$ bis zur dritten Ordnung.

Lösung:

$$f(0) = e^{\sin(0)} = e^0 = 1$$

$$f'(x) = \cos x \; e^{\sin x}$$

$$f'(0) = \cos 0 \; e^{\sin 0} = 1 \cdot e^{\sin(0)} = 1$$

$$f''(x) = (\cos x)' \; e^{\sin x} + \cos x \; (e^{\sin x})' = -\sin x \; e^{\sin x} + (\cos x)^2 \; e^{\sin x}$$

$$f''(0) = -\sin 0\ e^{\sin 0} + (\cos 0)^2\ e^{\sin 0} = -0 + 1^2 \cdot e^{\sin 0} = 1$$

$$\begin{aligned}
f'''(x) &= -(\sin x)'\ e^{\sin x} - \sin x\ (e^{\sin x})' + ((\cos x)^2)'\ e^{\sin x} + (\cos x)^2\ (e^{\sin x})' \\
&= -\cos x\ e^{\sin x} - \sin x\ \cos x\ e^{\sin x} + 2\cos x(-\sin x)\ e^{\sin x} + (\cos x)^3\ e^{\sin x} \\
&= -\cos x\ e^{\sin x} - 3\sin x\ \cos x\ e^{\sin x} + (\cos x)^3\ e^{\sin x}
\end{aligned}$$

$$f'''(0) = -\cos 0\ e^{\sin 0} - 3\sin 0\ \cos 0\ e^{\sin 0} + (\cos 0)^3\ e^{\sin 0} = 0$$

Fassen wir zusammen:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \mathcal{O}(x^4) \\
&= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4)
\end{aligned}$$

Aufgabe G3 ()

Berechnen Sie die Taylorreihe des natürlichen Logarithmus

$$f(x) = \ln(x)$$

um die Stelle $x_0 = 1$ bis zur zweiten Ordnung.

Lösung: Wir berechnen die ersten beiden Ableitungen

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

und

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Wir haben

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \mathcal{O}(x^3),
\end{aligned}$$

und mit $x_0 = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\ln(x) &= \ln(1) + \ln'(1)(x - 1) + \frac{1}{2}\ln''(1)(x - 1)^2 + \mathcal{O}(x^3) \\
&= (x - 1) - \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \mathcal{O}(x^3).
\end{aligned}$$

Hausübung

Aufgabe H1 (4P)

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = -\ln(1-x).$$

(a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, daß

$$\frac{f^{(n)}(x)}{n!} = \frac{1}{n}\frac{1}{(1-x)^n}$$

für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ gilt.

(b) Wie lautet die Taylorreihe von $f(x) = -\ln(1-x)$ um die Stelle $x_0 = -1$?

(c) Wie lautet die Taylorreihe von $f(x) = -\ln(1-x)$ um die Stelle $x_0 = 0$?

Lösung: (a): Induktionsanfang für $n = 1$:

$$\frac{f^{(1)}(x)}{1!} = (-\ln(1-x))' = \frac{1}{1}\frac{1}{(1-x)^1} = \frac{1}{1-x} = f'(x)$$

Induktionsannahme:
Wir nehmen an, daß

$$\frac{f^{(n)}(x)}{n!} = \frac{1}{n}\frac{1}{(1-x)^n}$$

bereits gezeigt wurde.
Induktionsschluß:
Wir wollen

$$\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)}\frac{1}{(1-x)^{(n+1)}}$$

zeigen:

$$\begin{aligned}
\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} &= \frac{1}{n+1}\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!} \\
&= \frac{1}{n+1}\frac{d}{dx}\frac{f^{(n)}(x)}{n!} = \frac{1}{n+1}\frac{d}{dx}\frac{1}{n}\frac{1}{(1-x)^n} \\
&= \frac{1}{(n+1)}\frac{1}{n}\frac{d}{dx}(1-x)^{(-n)} = \frac{1}{(n+1)}\frac{1}{n}(-n)(-1)(1-x)^{(-n-1)} \\
&= \frac{1}{(n+1)}\frac{1}{(1-x)^{(n+1)}}.
\end{aligned}$$

Zum Beweisprinzip der vollständigen Induktion:

- Der Beweis der vollständigen Induktion ist ein wichtiges Hilfsmittel in der Mathematik. Er kann häufig bei folgendem Problem angewandt werden.
- Es sei n_0 eine ganze Zahl und $A(n)$ für jedes $n \geq n_0$ eine Aussage.
- Es soll bewiesen werden: $A(n)$ ist richtig für alle $n \geq n_0$.
- Die Gültigkeit dieser unendlich vielen Aussagen $A(n)$ kann man nicht für jedes n einzeln nachprüfen. Hier hilft die vollständige Induktion.

Beweisprinzip:

- Um die Aussage $A(n)$ für alle $n \geq n_0$ zu beweisen, genügt es, zu zeigen:
  - Induktionsanfang: $A(n_0)$ ist richtig.
  - Induktionsschritt:Für ein beliebiges $n \geq n_0$ gilt:
    Falls $A(n)$ richtig ist, ist auch $A(n+1)$ richtig.
- Die Wirkungsweise dieses Prinzips ist leicht einzusehen:
  Nach (Induktionsanfang) ist zunächst $A(n_0)$ richtig.
  Wendet man den Induktionsschritt auf den Fall $n = n_0$ an, so erhält man die Gültigkeit von $A(n_0+1)$.
  Wiederholte Anwendung des Induktionsschrittes liefert dann die Richtigkeit von $A(n_0+2)$, $A(n_0+3)$ usw.

(b):

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(-1)}{n!}(x-(-1))^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}\frac{1}{(1-(-1))^n}(x-(-1))^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}\frac{1}{2^n}(x+1)^n \end{aligned}$$

(c):

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}x^n \end{aligned}$$

Aufgabe H2 (3P)

Berechnen Sie die Taylorreihe von

$$f(x) = e^{2x}\cos(x)$$

um den Punkt $x_0 = 0$ bis zur vierten Ordnung.

Lösung:

$$f(x) = e^{2x}\cos(x)$$

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = 2\,e^{2\,x}\,\cos(x) - e^{2\,x}\,\sin(x)$$

$$f'(0) = 2\,e^{2\cdot 0}\,\cos(0) - e^{2\cdot 0}\,\sin(0) = 2$$

$$f''(x) = 3\,e^{2\,x}\,\cos(x) - 4\,e^{2\,x}\,\sin(x)$$

$$f''(0) = 3\,e^{2\cdot 0}\,\cos(0) - 4\,e^{2\cdot 0}\,\sin(0) = 3$$

$$f^{(3)}(x) = 2\,e^{2\,x}\,\cos(x) - 11\,e^{2\,x}\,\sin(x)$$

$$f^{(3)}(0) = 2\,e^{2\cdot 0}\,\cos(0) - 11\,e^{2\cdot 0}\,\sin(0) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = -7\,e^{2\,x}\,\cos(x) - 24\,e^{2\,x}\,\sin(x)$$

$$f^{(4)}(0) = -7\,e^{2\cdot 0}\,\cos(0) - 24\,e^{2\cdot 0}\,\sin(0) = -7$$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4 + \mathcal{O}(x)^5 \\ &= 1 + 2\,x + \frac{3\,x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{7\,x^4}{24} + \mathcal{O}(x)^5 \end{aligned}$$

Aufgabe H3 (3P)

Berechnen Sie die Taylorreihe des Tangens

$$f(x) = \tan(x)$$

um die Stelle $x_0 = 0$ bis zur zweiten Ordnung.

Lösung:

$$\tan(0) = 0$$

$$\begin{aligned} \tan(x)' &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = (sin(x)\cos^{-1}(x)) = \cos(x)\cos^{-1}(x) + \sin(x)(-1)\cos^{-2}(x)(-\sin(x)) \\ &= 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} \end{aligned}$$

$$\tan(0)' = 1$$

$$\left(\frac{1}{\cos^2(x)}\right)' = -2\frac{1}{\cos^3(x)}(\cos(x)') = 2\frac{\sin(x)}{\cos^3(x)}$$

$$\tan(0)'' = 0$$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f'(0)x^2 + \mathcal{O}(x^3) \\ &= x + \mathcal{O}(x^3). \end{aligned}$$