Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2007/2008
29.11.2006

7. Übungsblatt zur „Mathematik I für Chemiker"

Gruppenübung

Aufgabe G1 ()

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(f) = \mathbb{R}$ und $f(x) = \sin x$. Berechnen Sie die Ableitung von f an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$, indem Sie den Differenzenquotienten aufstellen und einen Grenzübergang vornehmen.

Hinweise:

(a) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

(b) $-\sin(\alpha) = \sin(-\alpha)$

(c) $\lim_{h\to 0}\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} = 1$

Lösung: Da die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(g) = \mathbb{R}$ und $g(x) = \cos x$ stetig ist, gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin(\frac{h}{2})\cos(x_0+\frac{h}{2})}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}}\lim_{h\to 0}\cos(x_0+\frac{h}{2}) \\
&= \cos x_0.
\end{aligned}$$

Aufgabe G2 ()

(a) Bestimmen Sie die Ableitung folgender Funktionen mit Hilfe der Ableitungsregeln:

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$ für $x \in D(f) = \mathbb{R}$

(ii) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{4}{x^2} - 3 + 5x$ für $x \in D(g) = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

(iii) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = \sqrt{1+\cos^2(x)}$ für $x \in D(h) = \mathbb{R}$

(b) Berechnen Sie die Ableitung von

$$k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } k(x) = \frac{1}{x} \text{ für } x \in D(k) := \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

mit Hilfe der Definition von Differenzierbarkeit.

Lösung:

(a) Mit Hilfe der Rechenregel ergibt sich:

(i) $f'(x) = e^{\sin x} \cos x$

(ii) $g'(x) = -\frac{6}{x^4} - \frac{8}{x^3} + 5$

(iii) $h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 x}} \cos x \sin x$

(b) Behauptung: $k'(x) = -\frac{1}{x^2}$
Beweis: Sei $x_0 \in D(k) \cap H(D(k))$. Dann gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} -\frac{1}{x x_0} = -\frac{1}{x_0^2},$$

d.h. $k'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$.

Aufgabe G3 ()

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(f) = \mathbb{R}$ und $f(x) = \sin(2x)$.
Berechnen Sie

(a) $f'(x)$,

(b) $f''(x)$,

(c) $f'''(x)$,

(d) $f^{(4)}(x)$,

(e) $f^{(10)}(x)$.

Lösung: Mit den Rechenregeln ergibt sich

(a) $f'(x) = 2\cos(2x)$,

(b) $f''(x) = -4\sin(2x)$,

(c) $f'''(x) = -8\cos(2x)$,

(d) $f^{(4)}(x) = 16\sin(2x)$.

(e) Somit gilt $f^{(10)}(x) = \left(\left(f^{(4)}\right)^{(4)}\right)''(x) = -2^{10}\sin(2x)$.

Hausübung

Aufgabe H1 ()

(a) Bestimmen Sie die Ableitung folgender Funktionen mit Hilfe der Ableitungsregeln:

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x+2}$ für $x \in D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

(ii) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^4 e^x$ für $x \in D(g) = \mathbb{R}$

(iii) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = \sin^2(x^3 + \cos(x^2))$ für $x \in D(h) = \mathbb{R}$

(b) Berechnen Sie die Ableitung von

$$k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } k(x) = x|x| \text{ für } x \in D(k) := \mathbb{R}$$

mit Hilfe der Definition von Differenzierbarkeit.

Lösung:

(a) Mit Hilfe der Rechenregel ergibt sich:

(i) $f'(x) = \frac{x^2+4x-5}{(x+2)^2}$

(ii) $g'(x) = 4x^3 e^x + x^4 e^x$

(iii) $h'(x) = 2\sin(x^3 + \cos(x^2))\cos(x^3 + \cos(x^2))(3x^2 - \sin(x^2)2x)$

(b) Behauptung: $k'(x) = 2|x|$
Beweis: Sei $x_0 \in D(k) \cap H(D(k))$. Dann gilt für $x \in D(k) \setminus x_0$:

$$\frac{x|x| - x_0|x_0|}{x - x_0} = \frac{x|x| - x_0|x| + x_0|x| - x_0|x_0|}{x - x_0} = |x| + \frac{x_0(|x| - |x_0|)}{x - x_0}.$$

Fall 1: $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x|x| - x_0|x_0|}{x - x_0} = \lim_{x \to 0} |x| = 0,$$

d.h. $k'(0) = 0$.

Fall 2: $x_0 > 0$
Es genügt, nur $x \in D(f)$ mit $x > 0$ zu betrachen (Wieso?). Für diese x gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x|x| - x_0|x_0|}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} |x| + \frac{x_0(x - x_0)}{x - x_0} = 2x_0,$$

d.h. $k'(x_0) = 2x_0$ für $x_0 > 0$.

Fall 3: $x_0 < 0$

Analog zum zweiten Fall sieht man $k'(x_0) = -2x_0$ für $x_0 < 0$.
Insgesamt ergibt sich $k'(x_0) = 2|x_0|$.

Aufgabe H2 ()

Es sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

für $x \in D(f) := \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass f stetig ist.

(b) Untersuchen Sie, ob mit dieser Wahl von a die Funktion f sogar differenzierbar ist und bestimmen Sie gegebenenfalls die Ableitungsfunktion f'.

(c) Ist f' stetig auf $\mathbb{R}$?

Lösung:

(a) Nach den Rechenregeln ist f in $x \in D(f) \setminus \{0\}$ stetig. Daher genügt es $x = 0$ zu untersuchen. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Dann gilt:

$$-x_n^2 \leq |f(x_n)| \leq x_n^2,$$

da der Sinus durch 1 beschränkt ist. Mit dem Einschließungskriterium folgt

$$\lim_{x_n \to 0} f(x_n) = 0.$$

Daher ist $a = 0$ zu wählen.

(b) Für $x \neq 0$ folgt mit den Rechenregeln

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

<u>Behauptung:</u> $f'(0) = 0$.
<u>Beweis:</u>Es gilt:

$$-x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x.$$

Daher folgt mit dem Einschließungskreiterium

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x}) - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Somit ist $f'(0) = 0$.

(c) Wähle $x_n = \frac{1}{2n\pi}$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ aber

$$\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0 = f'(0).$$

Daher ist die erste Ableitung in 0 nicht stetig.