Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2007/2008
22.11.2007

# 6. Übungsblatt zur „Mathematik I für Chemiker“

## Gruppenübung

**Aufgabe G1** ()

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{x}{|x|} & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(a) Hat $f$ an der Stelle $x_0 = 0$ einen rechts-/linksseitigen Grenzwert? Hat $f$ an der Stelle $x_0 = 0$ einen Grenzwert? Berechnen Sie die Werte gegebenenfalls!

(b) Ist $f$ an der Stelle $x_0 = 0$ rechts-/linksseitig stetig? Ist $f$ an der Stelle $x_0 = 0$ stetig?

**Lösung:**

(a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ eine Nullfolge, d.h. $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N} : f(x_n) = x_n - 1$, da $\frac{x_n}{|x_n|} = 1$. Aus den Rechenregeln für konvergente Folgen erhalten wir $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = -1$. Also existiert der rechtsseitige Grenzwert und $\lim_{x\searrow 0} = -1$.
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (-\infty, 0)$ eine Nullfolge, d.h. $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ : $f(x_n) = x_n + 1$, da $\frac{x_n}{|x_n|} = -1$. Aus den Rechenregeln für konvergente Folgen erhalten wir $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$. Also existiert der linksseitige Grenzwert und $\lim_{x\nearrow 0} = 1$.
Da rechts- und linksseitiger Grenzwert nicht übereinstimmen, hat $f$ an der Stelle $x_0 = 0$ keinen Grenzwert.

(b) Für den rechtsseitigen Grenzwert gilt $\lim_{x\searrow 0} = -1$. Da aber $f(0) = 1 \neq \lim_{x\searrow 0}$, ist $f$ in $x_0 = 0$ nicht rechtsseitig stetig.
Für den linksseitigen Grenzwert gilt $\lim_{x\nearrow 0} = 1$. Da $f(0) = 1 = \lim_{x\nearrow 0}$, ist $f$ in $x_0 = 0$ linksseitig stetig.
Da $f$ in $x_0 = 0$ nicht rechtsseitig stetig ist, ist $f$ nicht stetig.

**Aufgabe G2** ()

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in (-\infty, 0), \\ x + 2 & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind:

(a) $f$ hat den Grenzwert $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

(b) $f$ hat den Grenzwert $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$.

(c) $f$ hat den rechtsseitigen Grenzwert $\lim_{x\searrow 0} f(x) = 2$.

(d) $f$ ist stetig an der Stelle $x_0 = 0$.

(e) $f$ ist rechtsseitig stetig an der Stelle $x_0 = 1$.

(f) $f$ ist stetig.

**Lösung:**

(a) falsch

(b) wahr

(c) wahr

(d) falsch

(e) wahr

(f) falsch

**Aufgabe G3** ()

Die rationale Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ und $f(x) = \frac{x^2-4}{3x^4(x-2)}$.

(a) Für welche $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$?

(b) Bestimmen Sie $\lim_{x\to x_0} f(x)$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$, für die dieser Grenzwert existiert.

**Lösung:**

(a) Wir betrachten zunächst Zähler und Nenner getrennt.
Der Zähler $x^2-4$ setzt sich als Produkt bzw. Summe von Funktionen zusammen, deren Grenzwerte für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ existieren. Für den Zähler existieren somit die Grenzwerte $\lim_{x\to x_0} f(x)$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.
Der Nenner $3x^4(x-2)$ setzt sich als Produkt bzw. Summe von Funktionen zusammen, deren Grenzwerte für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ existieren. Für den Nenner existieren somit die Grenzwerte $\lim_{x\to x_0} f(x)$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$. Allerdings gilt für $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$, dass $3x_i^4(x_i - 2) = 0$, $i = 1, 2$.
Somit existiert der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ für alle $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$. Da jedoch gilt $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ (3. binomische Formel), erhalten wir $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{3x^4(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)}{3x^4} = \frac{1}{12}$. Insgesamt erhalten wir, dass der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ für alle $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert.

(b) Es gilt $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{(x+2)}{3x^4} = \frac{(x_0+2)}{3x_0^4}$ für $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

# Hausübung

**Aufgabe H1** ()

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(f) = [0, 3]$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 2x + x^2 & \text{für} \quad x \in [0, 1], \\ ax - x^3 + x & \text{für} \quad x \in ]1, 2[, \\ \dfrac{b(x^{5-a} - x - 1)}{x^2 + 1} & \text{für} \quad x \in [2, 3]. \end{cases}$$

Bestimmen Sie $a$ und $b$ so, dass $f$ auf $D(f)$ stetig ist.

**Lösung:** Der linksseitige Grenzwert der Funktion $f$ an der Stelle $x = 1$ ist 3. In Abhängigkeit von $a$ berechnet sich der rechtsseitige Grenzwert als $\lim_{x \searrow 1} f(x) = a$. Für die Wahl $a = 3$ stimmen also rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert der Funktion überein. An der Stelle $x = 2$ ist der linksseitige Grenzwert 0. Da 2 keine Nullstelle von $x^2 - x - 1$ ist, bleibt für die Wahl von $b$ nur $b = 0$. In diesem Fall ist $f$ eine auf ganz $D(f)$ stetige Funktion (man beachte, dass $x^2 + 1$ keine Nullstellen in $[2, 3]$ besitzt).

**Aufgabe H2** ()

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, 4$, für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ die Grenzwerte $\lim_{x \searrow x_0} f_i(x)$, $\lim_{x \nearrow x_0} f_i(x)$ und $\lim_{x \to x_0} f_i(x)$, soweit diese existieren.

(a) $f_1(x) = \dfrac{1}{(x-4)^2}$ für $x \in D(f_1) = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

(b) $f_2(x) = \dfrac{\sqrt{|x|} - 3}{x - 9}$ für $x \in D(f_2) = \mathbb{R} \setminus \{9\}$

(c) $f_3(x) = \dfrac{x-3}{|x-3|}$ für $x \in D(f_3) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

(d) $f_4(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 5x}$ für $x \in D(f_4) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x \neq 0\}$

**Lösung:** (a) Fall 1: $x_0 \in D(f_1)$. Dann ist die Funktion stetig in $x_0$ und es gilt $\lim_{x \searrow x_0} f_1(x) = \lim_{x \nearrow x_0} f_1(x) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) = f_1(x_0)$.
Fall 2: $x_0 = 4$. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $\lim_{n \to \infty} x_n = 4$ und $x_n < 4$. Dann ist $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{(x_n - 4)^2} = \infty$ und somit $\lim_{x \nearrow 4} f_2(x) = \infty$. Analog erhalten wir $\lim_{x \searrow 4} f_2(x) = \infty$. Damit gilt $\lim_{x \to 4} f_2(x) = \infty$.
(b) Fall 1: $x_0 \in D(f_2)$. Dann ist die Funktion stetig in $x_0$ und es gilt $\lim_{x \nearrow x_0} f_2(x) = \lim_{x \searrow x_0} f_2(x) = \lim_{x \to x_0} f_2(x) = f_2(x_0)$.
Fall 2: $x_0 = 9$. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $\lim_{n \to \infty} x_n = 9$, $x_n \neq 9$ und $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\frac{\sqrt{x_n} - 3}{x_n - 9} = \frac{\sqrt{x_n} - 3}{(\sqrt{x_n} - 3)(\sqrt{x_n} + 3)} = \frac{1}{(\sqrt{x_n} + 3)}.$$

Damit erhalten wir $\lim_{x \nearrow 9} f_2(x) = \lim_{x \searrow 9} f_2(x) = \lim_{x \to 9} f_2(x) = \frac{1}{6}$.
(c) Fall 1: $x_0 > 3$. Dann ist $f_3$ in $x_0$ stetig und es gilt $\lim_{x \nearrow x_0} f_1(x) = \lim_{x \searrow x_0} f_1(x) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) = f_1(x_0) = 1$.
Fall 2: $x_0 < 3$. Dann ist $f_3$ in $x_0$ stetig und es gilt $\lim_{x \nearrow x_0} f_1(x) = \lim_{x \searrow x_0} f_1(x) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) = f_1(x_0) = -1$.
Fall 3: $x_0 = 3$. Mit den beiden obigen Fällen erhalten wir $\lim_{x \searrow 3} f_3(x) = 1$ und $\lim_{x \nearrow 3} f_3(x) = -1$. Der Grenwert von $f_3(x)$ mit $x \to 3$ existiert nicht.
(d) Es gilt $D(f_4) = \mathbb{R} \setminus \{0, 5\}$.
Fall 1: $x_0 \in D(f_4)$. Die Funktion ist stetig in $x_0$ und es gilt $\lim_{x \nearrow x_0} f_4(x) = \lim_{x \searrow x_0} f_4(x) = \lim_{x \to x_0} f_4(x) = f_4(x_0)$.
Fall 2: $x_0 = 0$. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$ und $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\frac{2x_n}{x_n^2 - 5x_n} = \frac{2}{x_n - 5}.$$

Wir erhalten $\lim_{n \to \infty} f_4(x_n) = -\frac{2}{5}$ und damit $\lim_{x \nearrow 0} f_4(x) = \lim_{x \searrow 0} f_4(x) = \lim_{x \to 0} f_4(x) = -\frac{2}{5}$.
Fall 3: $x_0 = 5$. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $\lim_{n \to \infty} x_n = 5$, $x_n < 5$ und $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\frac{2x_n}{x_n^2 - 5x_n} = \frac{2}{x_n - 5}.$$

Wir erhalten $\lim_{n \to \infty} f_4(x_n) = -\infty$ und damit $\lim_{x \nearrow 5} f_4(x) = -\infty$.
Analog erhalten wir $\lim_{x \searrow 5} f_4(x) = \infty$. Somit existiert der Grenzwert von $f_4(x)$ mit $x \to 5$ nicht.